

Глава 8

ВОЗДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСОВ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ. МЕТОД СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 8.1. Вводные замечания

В предыдущих главах мы рассматривали процессы, происходящие в колебательных контурах и их элементах при воздействии на них периодических колебаний.

Однако не менее важным и необходимым является изучение процессов, происходящих в колебательных контурах при воздействии на них разнообразных импульсов, а также при подключении к ним постоянного или переменного напряжения.

Этим вопросам посвящена настоящая глава.

Процессы, рассматриваемые в этой главе, можно исследовать с помощью дифференциальных уравнений, операторным методом и методом спектральных функций, называемым часто методом интеграла Фурье.

§ 8.2. Собственные колебания в колебательном контуре

Вначале мы рассмотрим нестационарные процессы, происходящие при воздействии на контур постоянных и переменных напряжений, с помощью дифференциальных уравнений.

На основании второго закона Кирхгофа можно для контура, состоящего из последовательно включенных L , C , r и эдс $E(t)$ написать дифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_C = E(t),$$

где i — ток в контуре, u_C — напряжение на конденсаторе контура.

Ток через конденсатор равен $i = C \frac{du_C}{dt}$, откуда

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2}.$$

Подставляя эти значения в дифференциальное уравнение и деля его на $LC = \frac{1}{\omega_p^2}$, получим

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \omega_p^2 u_C = \omega_p^2 e(t)}. \quad (8.1)$$

Как известно, для нахождения общего решения этого уравнения достаточно найти его частное решение и сложить с общим решением аналогичного уравнения без правой части:

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \omega_p^2 u_C = 0}. \quad (8.1a)$$

Последнее уравнение будет соответствовать случаю, когда эдс равна нулю.

Общее решение ур-ния (8.1a) будем искать в виде

$$u_C = B e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi). \quad (8.2)$$

Подставим это значение u_C в ур-ние (8.1a). После группирования членов и сокращения на множитель $B e^{-\alpha t}$ получим:

$$\left(\alpha^2 - \omega_c^2 - \frac{r}{L} \alpha + \omega_p^2\right) \cos(\omega_c t + \psi) + \left(2\alpha\omega_c - \frac{r}{L} \omega_c\right) \sin(\omega_c t + \psi) = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворяться для любых значений t только тогда, когда

$$\alpha^2 - \omega_c^2 - \frac{r}{L} \alpha + \omega_p^2 = 0$$

и

$$2\alpha\omega_c - \frac{r}{L} \omega_c = 0,$$

откуда получим

$$\boxed{\alpha = \frac{r}{2L} = \frac{\omega_p}{2Q}} \quad (8.3)$$

и

$$\boxed{\omega_c = \sqrt{\omega_p^2 - \frac{r^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_p^2 - \omega_p^2 \frac{1}{4Q^2}} = \omega_p \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}. \quad (8.4)$$

Таким образом, при отсутствии внешних эдс в колебательном контуре напряжение u_C будет изменяться в соответствии с ф-лой (8.2), в которой ω_c и α определяются параметрами контура, а величины B и ψ могут быть любыми и будут, очевидно, определяться причинами, создавшими колебания в контуре.

Полученные колебания называются собственными колебаниями контура, а частота ω_c — частотой собственных колебаний.

Ток в контуре будет равен

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -CB\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \psi) - CB e^{-\alpha t} \omega_c \sin(\omega_c t + \psi). \quad (8.5)$$

Для контуров с нормальной добротностью ($Q \approx 100$) можно считать:

$$\omega_c \approx \omega_p, \quad \frac{\alpha}{\omega_c} \approx \frac{\alpha}{\omega_p} = \frac{r}{2L\omega_p} = \frac{1}{2Q} \ll 1.$$

Поэтому для этих контуров собственные колебания можно приближенно записать так:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= B e^{-\alpha t} \cos(\omega_p t + \psi) \\ i &= -\omega_p C B e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t + \psi) \end{aligned} \right\}. \quad (8.6)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только контуры с нормальной добротностью.

Как видно из ур-ний (8.6), амплитуда собственных колебаний уменьшается по показательному закону и становится равной нулю через бесконечно большое время. Условно называют временем затухания собственных колебаний время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в 10 раз (рис. 8.1).

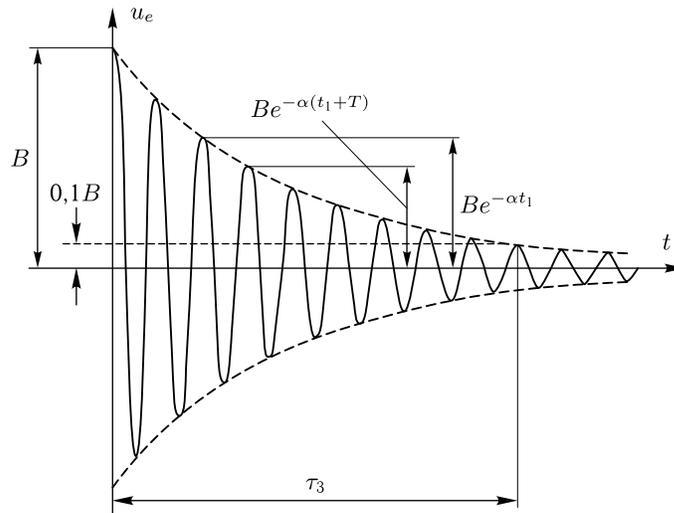


Рис. 8.1. Собственные колебания в последовательном контуре

Найдем это время. В момент времени $t = 0$ амплитуда u_C будет равна B . В момент τ_3 , соответствующий затуханию собственных колебаний в 10 раз, амплитуда u_C должна быть равна

$$Be^{-\alpha\tau_3} = 0,1B,$$

откуда, сокращая на B и, беря натуральный логарифм от правой и левой части равенства, получим

$$-\alpha\tau_3 = \ln 0,1 = -2,3.$$

Следовательно,

$$\tau_3 = \frac{2,3}{\alpha} = 4,6 \frac{L}{r} = 4,6 \frac{Q}{\omega_p}. \quad (8.7)$$

Чем больше добротность контура, тем больше будет τ_3 .

Иногда для характеристики затухания собственных колебаний вводят понятие логарифмического декремента затухания, подразумевая под ним натуральный логарифм отношения амплитуд собственных колебаний через период (рис. 8.1). Таким образом, логарифмический декремент затухания будет равен

$$\delta = \ln \frac{Be^{-\alpha t_1}}{Be^{-\alpha(t_1+T)}} = \alpha T,$$

или, поскольку период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} \approx \frac{2\pi}{\omega_p},$$

$$\delta = \frac{2r\pi}{2L\omega_p} = \frac{\pi}{Q}.$$

Разберем физику процессов при собственных колебаниях в контуре.

Рассмотрение начнем с момента, когда $i = 0$. В этом случае $u_C \neq 0$ и вся энергия в контуре будет сосредоточена в конденсаторе. Конденсатор начнет разряжаться и ток будет увеличиваться. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока конденсатор не разрядится полностью. В этот момент вся энергия поля конденсатора перейдет в энергию поля катушки за исключением, обычно небольшой, доли энергии, которая перейдет в тепло, нагревая сопротивление r . Ток при этом не прекратится, а будет поддерживаться эдс индуктивности и будет заряжать конденсатор с обратной полярностью. Этот процесс заряда будет продолжаться до тех пор, пока вся энергия магнитного поля не перейдет в энергию поля конденсатора (опять за исключением некоторой доли энергии, которая перейдет в тепло). После этого конденсатор снова начнет разряжаться и будет создавать ток, направление которого будет обратно первоначальному. Этот процесс будет повторяться бесконечное число раз, но с каждым разом амплитуда колебаний будет уменьшаться, так как энергия поля будет постепенно переходить в тепло.

Скорость затухания колебаний, характеризуемая логарифмическим декрементом, будет тем больше, чем больше будет отношение потери энергии за период к общей энергии, запасенной в поле контура. Как мы видели в § 4.7, это отношение обратно пропорционально добротности контура. Этим и объясняется связь добротности и логарифмического декремента.

§ 8.3. Нестационарные процессы в колебательном контуре

Рассмотрим ряд частных случаев:

а) Разряд конденсатора

Пусть конденсатор в схеме рис. 8.2 был заряжен до величины U_0 . В момент $t = 0$ был замкнут ключ K и начался разряд конденсатора. В этом случае $E(t) = 0$. Поэтому ток и напряжение на конденсаторе будут соответствовать выражениям (8.6). Найдем для этого случая значения B и ψ .

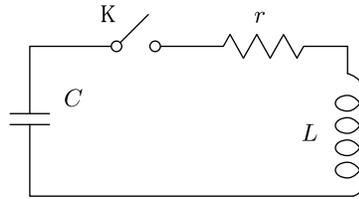


Рис. 8.2. Схема разряда конденсатора в последовательном контуре

Так как заряд на конденсаторе и ток через катушку индуктивности измениться мгновенно не могут, то в начальный момент при $U_C = U_0$, $i = 0$. Подставляя эти значения в (8.6) и, полагая $t = 0$, получим

$$\begin{aligned} B \cos \psi &= U_0, \\ -\omega_p C B \sin \psi &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\psi = 0, \quad B = U_0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u_C &= U_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_p t, \\ i &= -\omega_p C U_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_p t. \end{aligned}$$

Физика процесса для этого случая полностью соответствует случаю, рассмотренному в предыдущем параграфе.

б) Включение постоянной эдс

Пусть

$$E(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0$$

и

$$E(t) = E = \text{const} \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Подставляя это значение в уравнение (8.1), получим частное решение для $t > 0$:

$$u_C = E, \quad i = 0.$$

С учетом (8.6) общее решение будет следующим:

$$\begin{aligned} u_C &= E + Be^{-\alpha t} \cos(\omega_p t + \psi), \\ i &= -\omega_p C B e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t + \psi). \end{aligned}$$

Если до момента времени $t = 0$ заряда на конденсаторе и тока в контуре не было, то при $t = 0$:

$$\begin{aligned} u_C = 0 &= E + B \cos \psi, \\ i = 0 &= -\omega_p C B \sin \psi, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi &= 0, \\ B &= -E. \end{aligned}$$

Таким образом, для данного случая:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= E - Ee^{-\alpha t} \cos \omega_p t \\ i &= \omega_p C E e^{-\alpha t} \sin \omega_p t \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Эти значения напряжения и тока изображены на рис. 8.3. Как видим из формул и этого рисунка, в конце концов, когда затухнут собственные колебания, мы будем иметь:

$$u_C = E, \quad i = 0.$$

Следует отметить, что через полпериода собственных колебаний $u_C \approx 2E$, т. е. напряжение на конденсаторе вдвое больше эдс. Это обстоятельство в ряде случаев приходится учитывать, так как такое повышение напряжения может привести к пробое конденсатора. Причина этого явления заключается в том, что пока $u_C < E$ разность этих напряжений вызывает рост тока. Затем, когда $u_C = E$, ток не может сразу прекратиться и, поддерживаемый эдс индуктивности, течет в том же направлении, продолжая заряжать конденсатор до значений напряжения, больших E . Поскольку конденсатор оказывается заряженным до $u_C > E$, он начинает разряжаться. Это вызывает собственные колебания в контуре.

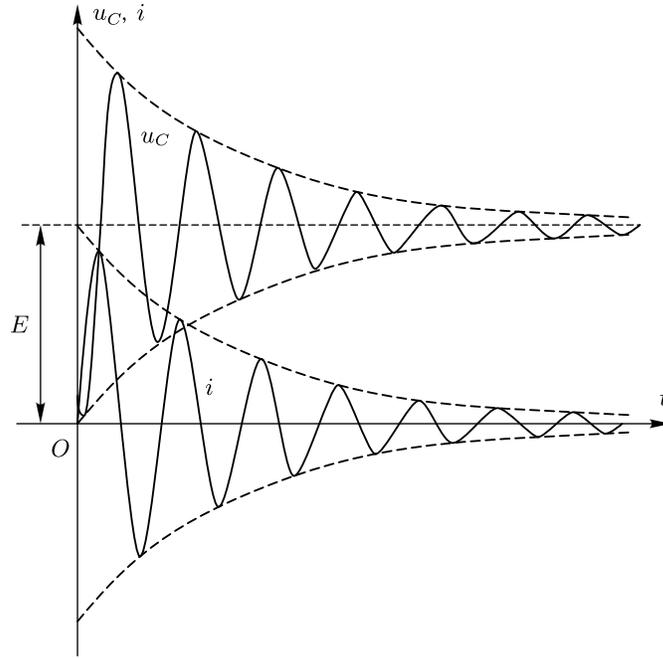


Рис. 8.3. Напряжение на конденсаторе u_C и ток i в последовательном контуре при включении постоянной эдс

в) Включение синусоидальной эдс с частотой близкой к ω_p

В данном случае

$$\begin{aligned} E(t) &= 0 && \text{при } t < 0 \\ E(t) &= E_m \cos(\omega_0 t + \varphi) && \text{при } t > 0. \end{aligned}$$

В качестве частного решения ур-ния (8.1) возьмем u_C и i , соответствующие установившемуся режиму при данной эдс (см. § 4.3 и 4.6).

В качестве общего решения этого уравнения без правой части возьмем выражение (8.6). Тогда общее решение ур-ния (8.1) с правой частью будет равно сумме этих решений, т. е.

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{QE_m}{\sqrt{1 + \xi_0^2}} \cos\left(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2} - \beta\right) + Be^{-\alpha t} \cos(\omega_p t + \psi); \\ i &= \frac{E_m}{r\sqrt{1 + \xi_0^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi - \beta) - \omega_p C B e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t + \psi), \end{aligned}$$

где

$$\xi_0 = Q \left(\frac{\omega_0}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega_0} \right), \quad \beta = \arctg \xi_0.$$

Если до включения эдс колебаний в контуре не было, то при $t = 0$

$$u_C = 0 = \frac{QE_m}{\sqrt{1 + \xi_0^2}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2} - \beta\right) + B \cos \psi;$$

$$i = 0 = \frac{E_m}{r\sqrt{1 + \xi_0^2}} \cos(\varphi - \beta) - \omega_p C B \sin \psi.$$

Деля второе уравнение на $\omega_p C$ и заменяя $\cos(\varphi - \beta)$ на $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2} - \beta\right)$, получим два уравнения:

$$\frac{QE_m}{\sqrt{1 + \xi_0^2}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2} - \beta\right) = -B \cos \psi;$$

$$\frac{QE_m}{\sqrt{1 + \xi_0^2}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2} - \beta\right) = -B \sin \psi.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} - \beta;$$

$$B = \frac{QE_m}{\sqrt{1 + \xi_0^2}}.$$

Поэтому искомое решение будет:

$$\boxed{\begin{aligned} u_C &= \frac{QE_m}{\sqrt{1 + \xi_0^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi - \beta) - \frac{QE_m}{\sqrt{1 + \xi_0^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t + \varphi - \beta), \\ i &= \frac{E_m}{r\sqrt{1 + \xi_0^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi - \beta) - \frac{E_m}{r\sqrt{1 + \xi_0^2}} e^{-\alpha t} \cos(\omega_p t + \varphi - \beta). \end{aligned}}$$

(8.9)

Рассмотрим сначала случай, когда $\omega_0 = \omega_p$. При этом $\xi_0 = 0$, $\beta = 0$ и поэтому

$$\boxed{u_C = QE_m(1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega_0 t + \varphi),} \quad (8.10)$$

$$\boxed{i = \frac{E_m}{r}(1 - e^{-\alpha t}) \cos(\omega_0 t + \varphi).} \quad (8.11)$$

Временная диаграмма для тока i изображена на рис. 8.4. Из формул и рисунка видно, что сначала амплитуды напряжения и тока равны нулю, затем они постепенно нарастают и стремятся к величинам QE_m и $\frac{E_m}{r}$ соответственно.

Амплитуды нарастают не мгновенно, так как энергия магнитного поля катушки индуктивности и электрического поля конденсатора контура накапливается постепенно.

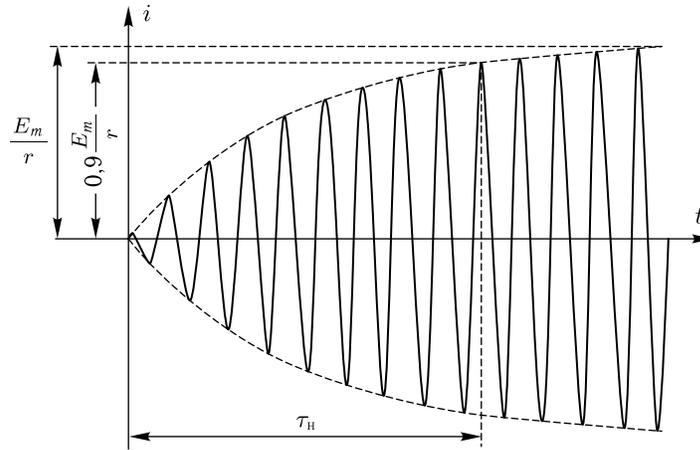


Рис. 8.4. Нарастание колебаний тока в последовательном контуре при включении синусоидальной эдс с резонансной частотой. $\tau_n = 4,6 \frac{L}{r} = 4,6 \frac{Q}{\omega_p}$ — время нарастания

На рис. 8.5а показано изменение энергии магнитного поля $W_m = \frac{Li^2}{2}$, а на рис. 8.5б — изменение энергии электрического поля $W_э = \frac{Cu_C^2}{2}$.

Как видно из этих рисунков, через каждые четверть периода энергия магнитного поля превращается в энергию электрического поля и наоборот. При этом общая энергия $W_m + W_э$ постепенно увеличивается. Этот процесс можно представить так: первая полуволна эдс вызывает полуволну тока, которая заряжает конденсатор до некоторой величины и в нем накапливается некоторая энергия. Затем конденсатор начинает разряжаться, создавая ток в обратном направлении. Эдс в это время также меняет направление и опять действует в направлении тока, увеличивая его. Таким образом, за вторую полуволну ток будет создаваться и напряжением на конденсаторе и эдс и будет больше, чем в первой полуволне. Больше будет и энергия магнитного поля, связанная с этим током. За эту полуволну тока конденсатор зарядится до большей величины, чем за предыдущую. Накопленная в нем энергия также будет больше. В эту энергию перейдет энергия магнитного поля и добавочная энергия, отданная эдс. Следующая полуволна по этим же причинам будет еще больше и т.д. Таким образом, колебания в контуре будут постепенно увеличиваться, однако это увеличение не будет беспредельным, так как с ростом амплитуды тока будет увеличиваться потеря энергии на нагревание сопротивления r , и при некотором значении амплитуды тока последняя перестанет нарастать,

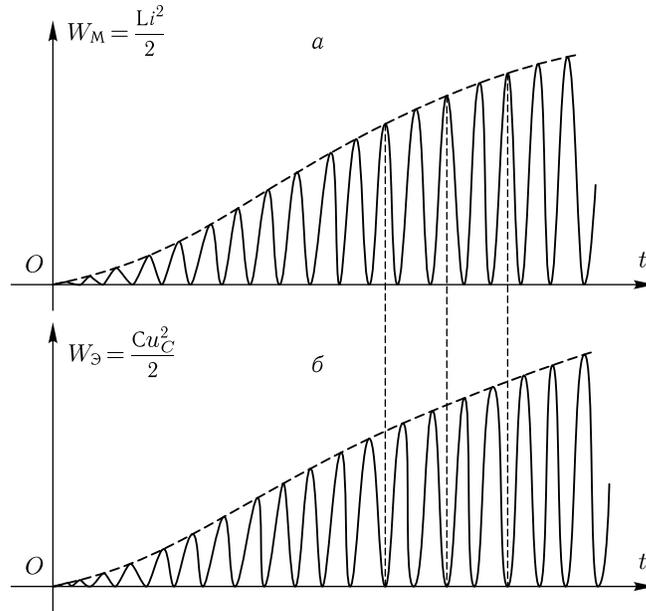


Рис. 8.5. Нарастание магнитной энергии W_M и электрической энергии $W_Э$ в последовательном контуре при включении синусоидальной эдс с резонансной частотой

так как вся энергия, отдаваемая эдс, будет уходить на покрытие потерь энергии.

На практике условно считают процесс установившимся не при $t = \infty$, а тогда, когда амплитуда тока I_m достигает 0,9 от значения, имеющего место при $t = \infty$ (рис. 8.4), т. е., когда

$$I_m = \frac{E_m}{r} (1 - e^{-\alpha t}) = 0,9 \frac{E_m}{r}.$$

Отсюда нетрудно найти время установления (время нарастания) тока:

$$t = \tau_H = \frac{2,3}{\alpha} = 4,6 \frac{L}{r} = 4,6 \frac{Q}{\omega_p}. \quad (8.12)$$

Отметим, что $\tau_H = \tau_Э$ (см. формулу 8.7).

На рис. 8.6 приведена зависимость амплитуды тока I_m от времени, построенная для различных значений сопротивления r . Из рисунка так же, как из ф-лы (8.12), видно, что чем меньше r (больше Q), тем больше время установления τ_H . В начальные моменты времени закон изменения амплитуды тока не зависит от r , так как потери энергии в контуре при этом еще невелики в силу малости тока, и вся энергия, отдаваемая эдс, идет на создание энергии поля.

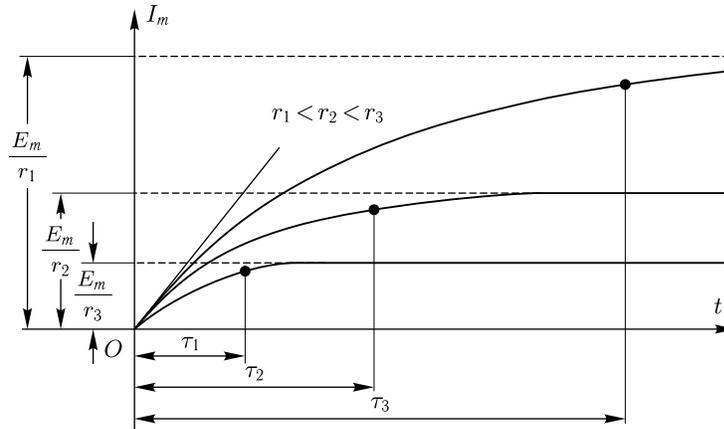


Рис. 8.6. Нарастание амплитуды тока в последовательных контурах, отличающихся друг от друга сопротивлением r при включении на них синусоидальной эдс с резонансной частотой

Теперь рассмотрим случай, когда частота подводимой эдс ω_0 равна резонансной частоте контура ω_p . Для этого случая нами было получено следующее выражение (8.9) для тока:

$$i = \frac{E_m}{r\sqrt{1+\xi_0^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi - \beta) - \frac{E_m}{r\sqrt{1+\xi_0^2}} e^{-\alpha t} \cos(\omega_p t + \varphi - \beta).$$

Построим векторную диаграмму этого колебания. Пусть ось проекций вращается по часовой стрелке со скоростью ω_0 . Тогда первая слагающая тока будет изображена вектором \overline{OA} , длина которого равна величине

$$\frac{E_m}{r\sqrt{1+\xi_0^2}},$$

а угол между ним и горизонтальной осью равен $\varphi - \beta$ (рис. 8.7).

Если предположить, что $\omega_0 < \omega_p$, то вторая составляющая изображается вектором \overline{OB} , вращающимся против часовой стрелки со скоростью $\omega_p - \omega_0$ (знак минус перед второй составляющей отброшен).

В момент времени $t = 0$ вектор \overline{OB} будет совпадать с вектором \overline{OA} по величине и направлению. С течением времени длина вектора \overline{OB} будет уменьшаться по показательному закону. Следовательно, конец вектора будет скользить по логарифмической спирали. Результирующим вектором будет вектор \overline{BA} , $\overline{B'A}$, $\overline{B''A}$ и т. д. Длина его пропорциональна амплитуде тока.

На рис. 8.8 изображена временная диаграмма тока, построенная на основании векторной диаграммы рис. 8.7.

На рис. 8.9 показан закон изменения амплитуды тока I_m от времени для двух различных значений частоты ω_0 . Из рисунка видно, что чем

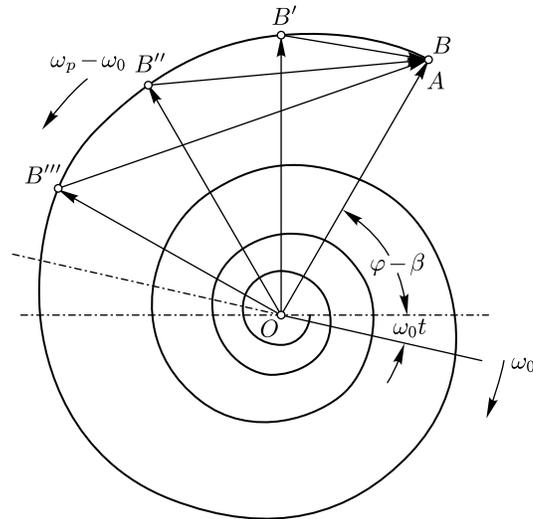


Рис. 8.7. Векторная диаграмма колебаний в последовательном контуре при включении синусоидальной эдс с частотой $\omega_0 \neq \omega_p$; \overline{OA} — вектор вынужденных колебаний; \overline{OB} , $\overline{OB'}$, $\overline{OB''}$ и $\overline{OB'''}$ — векторы собственных колебаний для трех последовательных моментов времени, начиная с момента включения; \overline{BA} , $\overline{B'A}$, $\overline{B''A}$ и $\overline{B'''A}$ — векторы соответствующих результирующих колебаний

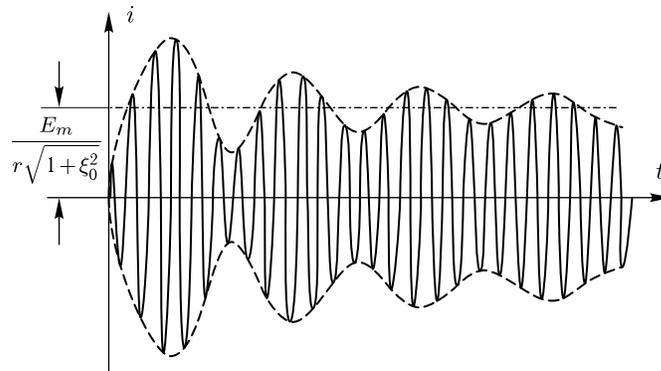


Рис. 8.8. Ток в последовательном контуре при включении синусоидальной эдс с частотой $\omega_0 \neq \omega_p$. Он соответствует векторной диаграмме рис. 8.7

меньше разница между частотами ω_0 и ω_p , тем меньше отклонения амплитуды от величины $\frac{E_m}{r\sqrt{1+\xi_0^2}}$, и тем, естественно, меньше частота $\omega_p - \omega_0$, с которой происходит эти отклонения.

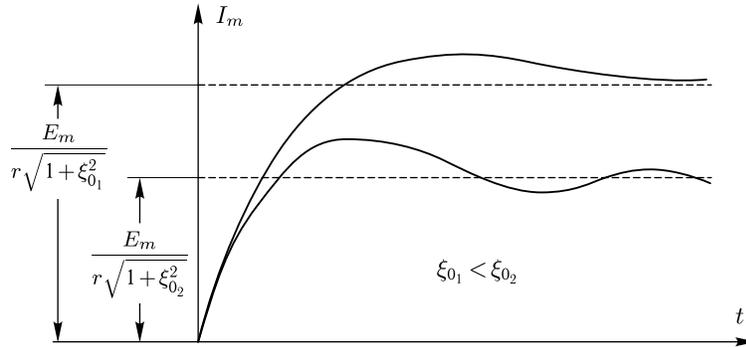


Рис. 8.9. Амплитуда тока в последовательном контуре при включении синусоидальной эдс с частотой $\omega_1 \neq \omega_p$ и с частотой $\omega_2 \neq \omega_p$, причем $(\omega_1 - \omega_p) < (\omega_2 - \omega_p)$, $\xi_{01} = Q \frac{2(\omega_1 - \omega_p)}{\omega_p}$, $\xi_{02} = Q \frac{2(\omega_2 - \omega_p)}{\omega_p}$

г) Выключение синусоидальной эдс

Рассмотрим, как будет изменяться ток в контуре, если синусоидальная эдс внезапно стала равной нулю.

В этом случае, начиная с момента выключения, скажем с $t = 0$, эдс в контуре станет равной нулю и в нем будут происходить собственные колебания, причем в начальный момент этих колебаний u_C и i будут такие же, как и в последний момент до выключения эдс. Таким образом, сдвиг фаз и амплитуда собственных колебаний в начальный момент будут примерно такие же, какие были до момента выключения. На рис. 8.10 изображены колебания i при выключении в момент $t = 0$ синусоидальной эдс. Время затухания этих колебаний определяется ф-лой (8.7).

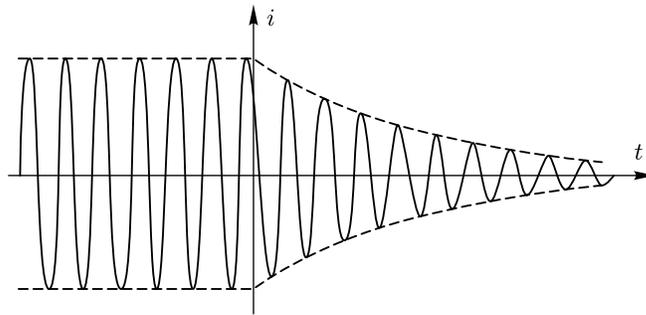


Рис. 8.10. Ток в последовательном контуре при выключении синусоидальной эдс

д) Воздействие телеграфных сигналов на последовательный колебательный контур

Рассмотрим воздействие на колебательный контур телеграфных сигналов, причем предположим, что частота этих сигналов равна резонансной частоте контура.

Если к контуру приложена эдс, временная диаграмма которой изображена на рис. 8.11а, то в соответствии с изложенным выше, ток, протекающий через контур, будет изменяться по закону, приведенному на рис. 8.11б. Очевидно, что огибающая амплитуд тока тем меньше будет отличаться от огибающей амплитуд напряжения, чем меньше добротность контура Q (сравните рис. 8.11б и 8.11в). При большом Q сигналы могут полностью слиться. Поэтому иногда бывает необходимо для обеспечения достаточно малого времени установления и затухания брать Q не слишком большим.

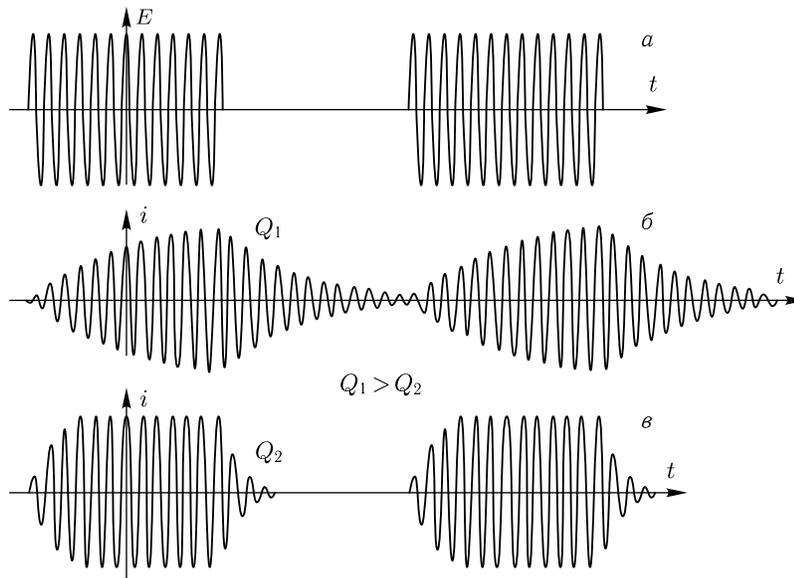


Рис. 8.11. а) Эдс телеграфных сигналов, б) ток от этой эдс в последовательном контуре с добротностью Q_1 , в) то же, в контуре с добротностью $Q_2 < Q_1$

Подведем итоги.

При отсутствии внешней эдс в контуре в нем могут существовать собственные колебания [ф-ла (8.6)], амплитуда и сдвиг фаз которых определяются запасом энергии в поле конденсатора и катушки индуктивности в начальный момент. Этот случай мы имели при разряде конденсатора и выключении синусоидальной эдс.

При наличии внешней постоянной или синусоидальной эдс в контуре будут существовать вынужденные колебания, соответствующие

установившемуся режиму, и собственные колебания. При этом амплитуда и сдвиг фаз собственных колебаний должны быть такими, чтобы в момент появления эдс энергии поля конденсатора и катушки индуктивности равнялась нулю, т.е. чтобы $u_C = 0$ и $i = 0$ (если до появления эдс колебаний в контуре не было). Этот случай был рассмотрен в п. б) (включение постоянной эдс) и п. в) (включение синусоидальной эдс).

Пример 8.1. На контур действует импульс эдс с постоянной амплитудой и резонансной частотой 1000 МГц. Длительность импульса 1 мкс. Требуется подобрать добротность контура такой, чтобы за время действия импульса амплитуда колебания в нем нарастала до 0,9 от установившегося значения.

Решение. В данном случае, очевидно, время нарастания τ_n должно равняться длительности импульса, т.е. 1 мкс. По ф-ле (8.12) получим:

$$Q = \frac{\tau_n \omega_p}{4,6} = \frac{10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 10^8}{4,6} = 137.$$

§ 8.4. Разложение в ряд Фурье периодической последовательности импульсов

Для исследования процессов в колебательном контуре мы разлагали модулированные колебания на синусоидальные составляющие. Теперь сделаем то же с импульсами. При этом мы будем пользоваться рядом Фурье в комплексной форме, который вначале и выведем.

Представим периодическую функцию $\Phi(t)$ с периодом T в виде ряда Фурье

$$\Phi(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos k\Omega t + S_k \sin k\Omega t), \quad (8.13)$$

где

$$C_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \Phi(t) \cos k\Omega t dt; \quad S_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \Phi(t) \sin k\Omega t dt, \quad (8.14)$$

и

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ряд (8.13) можно представить и в таком виде:

$$\Phi(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega t + \varphi_k). \quad (8.15)$$

Выразим коэффициенты S_k и C_k через A_k и φ_k .

Для этого перепишем ряд (8.15) в развернутой форме:

$$\Phi(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \varphi_k \cos k\Omega t - A_k \sin \varphi_k \sin k\Omega t). \quad (8.16)$$

Из сравнения выражений (8.13) и (8.16) видно, что

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= C_0 \\ A_k \cos \varphi_k &= C_k \\ -A_k \sin \varphi_k &= S_k. \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Ряд (8.15) может быть записан и в комплексной форме:

$$\Phi(t) = \frac{A_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i(k\Omega t + \varphi_k)} = \frac{A_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k e^{ik\Omega t}, \quad (8.18)$$

где $\mathbf{A}_k = A_k e^{i\varphi_k}$ — комплексная амплитуда колебания k -й гармоники. Модуль \mathbf{A}_k равен амплитуде, а аргумент — сдвигу фаз этого колебания.

Так как

$$\mathbf{A}_k e^{ik\Omega t} + \mathbf{A}_{-k} e^{-ik\Omega t} = 2 \operatorname{Re}(\mathbf{A}_k e^{ik\Omega t}),$$

где $\mathbf{A}_{-k} = A_k e^{-i\varphi_k}$, то ряд (8.18) можно записать и так:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_k e^{ik\Omega t}. \quad (8.19)$$

Выведем формулу, позволяющую определить комплексную амплитуду k -й гармоники \mathbf{A}_k непосредственно по функции $\Phi(t)$.

Комплексная амплитуда равна

$$\mathbf{A}_k = A_k e^{i\varphi_k} = A_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k).$$

На основании ф-л (8.17) и (8.14) это выражение можно подвергнуть следующему преобразованию:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k = C_k - iS_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\Phi(t) \cos k\Omega t - i\Phi(t) \sin k\Omega t] dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(t) (\cos k\Omega t - i \sin k\Omega t) dt. \end{aligned}$$

Откуда на основании формулы Эйлера

$$\mathbf{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(t) e^{-ik\Omega t} dt. \quad (8.20)$$

Обозначив здесь $k\Omega = \omega$, получим

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8.21)$$

Здесь $\mathbf{A}(\omega)$ — комплексная амплитуда колебания с частотой $\omega = k\Omega$, т. е. k -й гармоники.

Разложим в ряд Фурье бесконечную периодическую последовательность импульсов

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \dots F(t+2T) + F(t+T) + F(t) + F(t-T) + F(t-2T) + \dots \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t+mT). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Импульсы $F(t+2T)$, $F(t+T)$, $F(t)$, $F(t-T)$..., составляющие последовательность, идентичны по форме и сдвинуты по времени друг от друга на T . Эти импульсы изображены на рис. 8.12 *a, б, в, г, д*, а их сумма, т. е. последовательность $\Phi(t)$, на рис. 8.12*е*.

Найдем комплексные амплитуды составляющих ряда Фурье этой последовательности. На основании ф-лы (8.21) мы получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\omega) &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t+mT) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t+mT) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Введем новую переменную интегрирования

$$x = t + mT.$$

При этом $t = x - mT$, и верхний предел интегрирования будет равен $\frac{T}{2} + mT$, нижний $-\frac{T}{2} + mT$.

С учетом значения новой переменной, можно написать:

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega(x-mT)} = e^{-i\omega x} e^{i\omega mT} = e^{-i\omega x} e^{ik\frac{2\pi}{T} mT} = e^{-i\omega x} e^{ikm2\pi}.$$

Поскольку $e^{ikm2\pi} = 1$, так как km — целое число, имеем

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega x}.$$

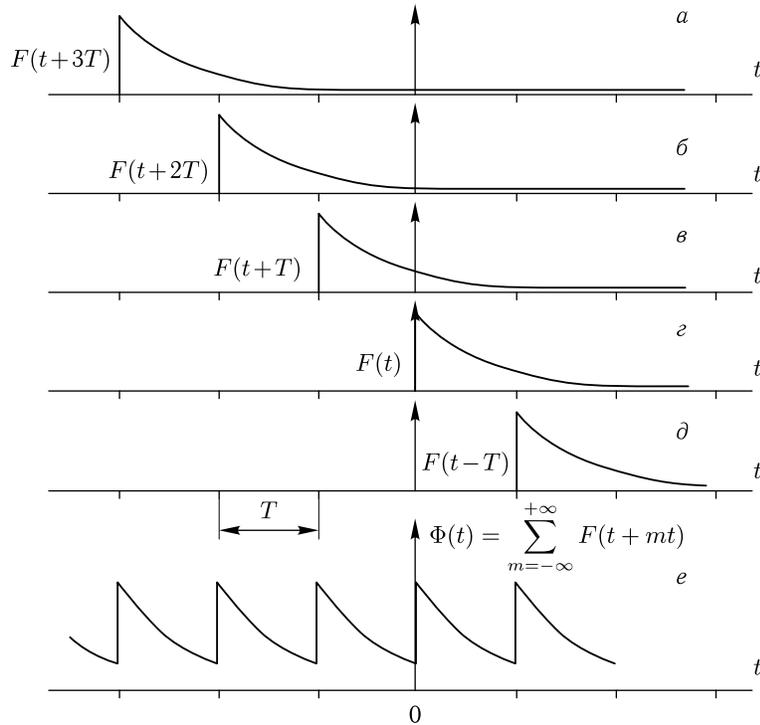


Рис. 8.12. Импульсы $F(t + mT)$ и их периодическая сумма $\Phi(t)$

Учитывая это, получим

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}+mT}^{\frac{T}{2}+mT} F(x)e^{-i\omega x} dx.$$

Раскрывая эту сумму, будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\omega) = \frac{2}{T} & \left[\dots + \int_{-2,5T}^{-1,5T} F(x)e^{-i\omega x} dx + \int_{-0,5T}^{0,5T} F(x)e^{-i\omega x} dx + \right. \\ & \left. + \int_{0,5T}^{1,5T} F(x)e^{-i\omega x} dx + \int_{1,5T}^{2,5T} F(x)e^{-i\omega x} dx + \dots \right]. \end{aligned}$$

В квадратных скобках этого выражения записаны члены суммы, для которых $m = -2; -1; 0; 1; 2$.

Очевидно, что то же выражение можно переписать в виде

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Поскольку определенный интеграл не зависит от переменной интегрирования, на основании последней формулы можно записать:

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8.24)$$

Как доказывается, интеграл (8.24) будет существовать, если функция $F(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле во всяком конечном промежутке и существует интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt. \quad (8.26)$$

§ 8.5. Спектральные функции импульсов

Назовем спектральной функцией импульса $F(t)$ выражение

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8.26)$$

Эта функция зависит только от формы импульса $F(t)$ и частоты ω .

Зная спектральную функцию импульса $F(t)$, легко найти на основании ф-лы (8.24) выражение для комплексной амплитуды k -ой гармоники:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}(\omega) = \frac{2}{T} \mathbf{G}_F(\omega) = \frac{\Omega}{\pi} \mathbf{G}_F(\omega), \quad (8.27)$$

где $\omega = k\Omega$, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, \mathbf{A}_k — комплексные амплитуды гармоник ряда Фурье для последовательности импульсов $F(t)$ с любым периодом следования T . Как видно из выражения (8.27), зависимость комплексных амплитуд гармоник от частоты полностью определяется спектральной функцией импульса, т. е. формой одиночного импульса последовательности. Период следования T влияет лишь как постоянный множитель, одинаковый для всех гармоник.

В этом параграфе мы найдем спектральные функции ряда наиболее важных для радиотехники импульсов. При этом в первом примере выясним подробно зависимость спектра последовательности импульсов от периода T .

а) Прямоугольные импульсы

Найдем спектральную функцию импульса, изображенного на рис. 8.13 и соответствующего уравнению:

$$\begin{cases} F(t) = B & \text{при } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ F(t) = 0 & \text{при } t < -\frac{\pi}{2} \text{ или } t > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (8.28)$$

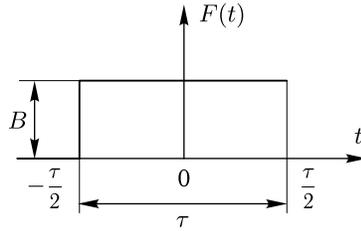


Рис. 8.13. Прямоугольный импульс

В соответствии с ф-лой (8.26) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt + \\ &+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B e^{-i\omega t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{B e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{B}{i\omega} (-e^{-i\omega \frac{\pi}{2}} + e^{i\omega \frac{\pi}{2}}) = 2B \frac{\sin \omega \frac{\pi}{2}}{\omega}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Спектральная функция для этого случая изображена на рис. 8.14.

Выражение (8.29) дает неопределенность при $\omega = 0$. Эта неопределенность легко раскрывается, если заменить синус для малого ω его аргументом. Получим $\mathbf{G}_F(0) = B\tau$.

Построим спектральную диаграмму для изображенной на рис. 8.15 периодической последовательности таких импульсов.

Отрезки, характеризующие амплитуды синусоидальных составляющих, будут отстоять друг от друга по угловой частоте на величину $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Длина отрезка, характеризующая амплитуду k -й гармоники, будет на основании ф-лы (8.27) пропорциональна модулю спектральной функции на этой частоте $G_F(k\Omega)$, умноженному на величину $\frac{\Omega}{\pi} = \frac{2}{T}$.

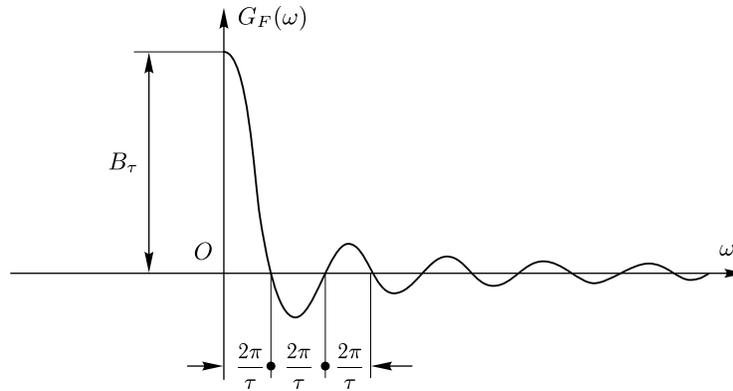


Рис. 8.14. Спектральная функция прямоугольного импульса рис. 8.13

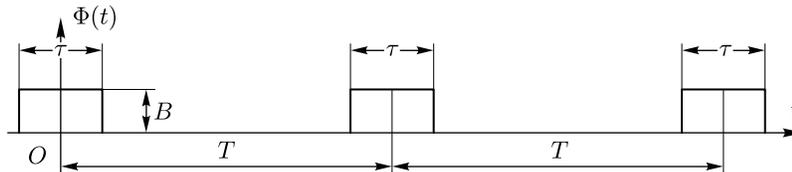


Рис. 8.15. Последовательность прямоугольных импульсов

Поэтому для построения спектральной диаграммы удобно построить сначала зависимость произведения $G_F(\omega) \frac{\Omega}{\pi}$ от частоты ω , которая будет огибающей отрезков, составляющих спектральную диаграмму.

На рис. 8.16а изображена спектральная диаграмма этой периодической последовательности импульсов для $T = 4\tau$. Сдвиги фаз групп гармоник указаны сверху.

На рис. 8.16б показана спектральная диаграмма последовательности тех же импульсов, но для $T = 8\tau$. Как видно из рис. 8.16б и ф-лы (8.27), амплитуды всех составляющих и расстояния между ними уменьшились вдвое.

На рис. 8.16в приведена спектральная диаграмма для последовательности тех же импульсов, но для $T = 16\tau$. При этом амплитуды всех составляющих и расстояния между ними уменьшились еще в два раза.

Если $T \rightarrow \infty$, то импульсы последовательности (8.22), для которых m положительно, сдвинутся в $-\infty$, а импульсы, для которых m отрицательно, в $+\infty$ и останется лишь один импульс, для которого $m = 0$.

С другой стороны при $T \rightarrow \infty$ амплитуды гармоник ряда Фурье и разность между частотами соседних гармоник будут бесконечно малы. Таким образом, одиночный импульс может быть представлен бесконечной суммой синусоидальных колебаний с бесконечно малыми амплитудами и бесконечно близкими частотами.

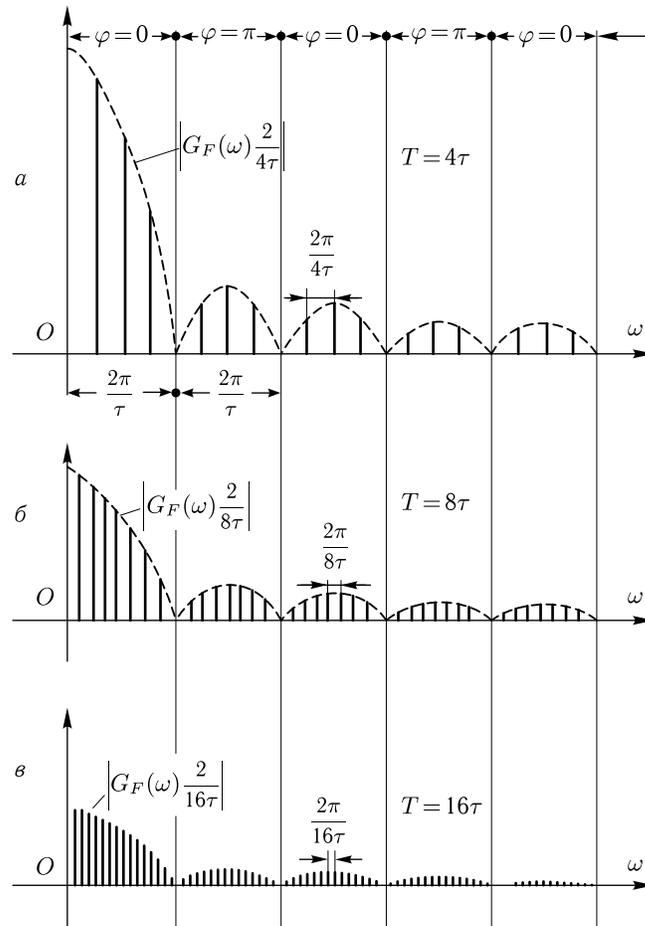


Рис. 8.16. Спектральные диаграммы последовательности прямоугольных импульсов: а) для импульсов рис. 8.15; б) для тех же импульсов, но с вдвое большим периодом повторения по сравнению с а; в) для тех же импульсов, но с периодом повторения вчетверо больше, чем в случае а

Пример 8.2. Требуется найти амплитуду и сдвиг фаз тысячной гармоники последовательности импульсов, изображенной на рис. 8.15, при условии, что $B = 1000$, $\tau = 1$ мкс и $T = 10$ мс.

Решение. Угловая частота тысячной гармоники будет равна

$$\omega = k\Omega = k\frac{2\pi}{T} = 1000\frac{2\pi}{10 \cdot 10^{-3}} = 6,28 \cdot 10^5.$$

Комплексная амплитуда согласно ф-ле (8.29) будет равна

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(6,28 \cdot 10^5) &= 2B \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega} \cdot \frac{2}{T} = \\ &= 2 \cdot 1000 \frac{\sin 6,28 \cdot 10^5 \cdot \frac{10^{-6}}{2}}{6,28 \cdot 10^5} \cdot \frac{2}{10 \cdot 10^{-3}} = 0,64 \sin 0,314 = 0,2. \end{aligned}$$

Таким образом, амплитуда гармоники будет равна 0,2, а сдвиг фаз равен нулю.

б) Импульсы высокой частоты

Найдем выражение спектральной функции импульса высокой частоты через спектральную функцию его огибающей.

Пусть дан импульс

$$f(t) = F(t) \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (8.30)$$

причем спектральная функция огибающей имеет вид

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8.31)$$

Найдем спектральную функцию $\mathbf{G}_f(\omega)$ импульса $f(t)$.

По ф-ле (8.26) имеем

$$\mathbf{G}_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-i\omega t} dt.$$

Учитывая, что

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} [e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}],$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_f(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) [e^{i(\omega_0 t + \varphi - \omega t)} + e^{i(-\omega_0 t - \varphi - \omega t)}] dt = \\ &= \frac{e^{i\varphi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{e^{-i\varphi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt. \end{aligned}$$

Первый интеграл этого выражения отличается от выражения (8.31) тем, что в нем вместо ω стоит разность $\omega - \omega_0$. Следовательно, он будет равен $\mathbf{G}_F(\omega - \omega_0)$. Аналогично второй интеграл будет равен $\mathbf{G}_F(\omega + \omega_0)$, поэтому

$$\boxed{\mathbf{G}_f(\omega) = \frac{e^{i\varphi}}{2} \mathbf{G}_F(\omega - \omega_0) + \frac{e^{-i\varphi}}{2} \mathbf{G}_F(\omega + \omega_0)}. \quad (8.32)$$

Во втором члене этой формулы аргумент при положительных значениях ω будет всегда больше ω_0 и, как мы увидим из дальнейшего, \mathbf{G}_F стремится к нулю с увеличением аргумента. Поэтому при достаточно большом ω_0 вторым членом выражения (8.32) можно пренебречь и считать

$$\mathbf{G}_f(\omega) \approx \frac{e^{i\varphi}}{2} \mathbf{G}_F(\omega - \omega_0). \quad (8.33)$$

в) Импульсы высокой частоты с прямоугольной огибающей

Найдем спектральную функцию импульса, изображенного на рис. 8.17 и соответствующего уравнению

$$\begin{aligned} f(t) &= B \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{при} \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ f(t) &= 0 \quad \quad \quad \text{при} \quad t < -\frac{\tau}{2} \quad \text{и} \quad t > \frac{\tau}{2}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

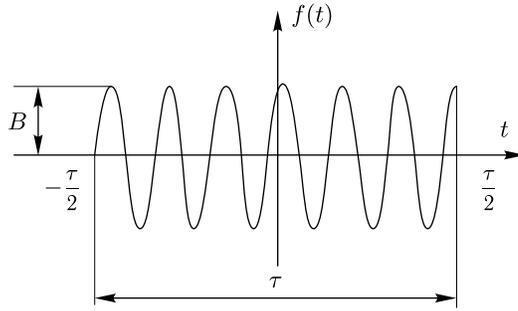


Рис. 8.17. Высокочастотный импульс с прямоугольной огибающей

Такие импульсы излучаются радиотелеграфными и радиолокационными передатчиками.

Этот импульс может быть представлен ф-лой (8.30), если $F(t)$ будет соответствовать ур-нию (8.28). Поэтому в соответствии с ф-лами (8.32) и (8.29) получим

$$\mathbf{G}_f(\omega) = B \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\omega - \omega_0} e^{i\varphi} + B \frac{\sin(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\omega + \omega_0} e^{-i\varphi}. \quad (8.35)$$

При достаточно большой ω_0 и $\omega > 0$ будем приближенно считать в соответствии с (8.33)

$$\mathbf{G}_f(\omega) \approx B \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\omega - \omega_0} e^{i\varphi}. \quad (8.36)$$

На рис. 8.18 изображены модули слагаемых выражения (8.35) при $\omega_0 = \frac{12\pi}{\tau}$. Как видно из этого рисунка, уже при данном ω_0 можно пренебречь вторым членом. При бóльших значениях ω_0 кривая, соответствующая первому члену, сдвинется вправо, а соответствующая второму члену — влево, и вторым членом можно будет пренебречь с еще большим основанием.

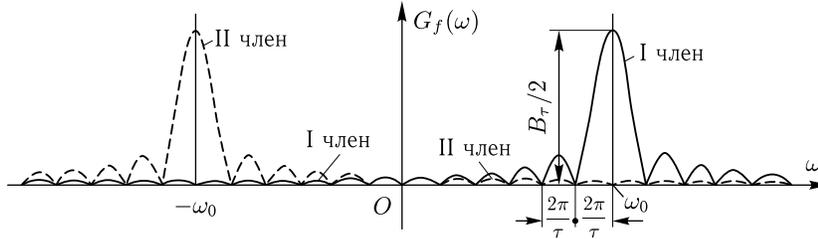


Рис. 8.18. Модули слагаемых спектральной функции высокочастотного импульса с прямоугольной огибающей (рис. 8.17)

г) Экспоненциальный импульс

Найдем спектральную функцию импульса, которому соответствует уравнение показательной функции

$$\left. \begin{array}{l} F(t) = Be^{-\alpha t} \quad \text{при } t > 0 \\ F(t) = 0 \quad \quad \quad \text{при } t < 0 \end{array} \right\} \quad (8.37)$$

Такой импульс изображен на рис. 8.19.

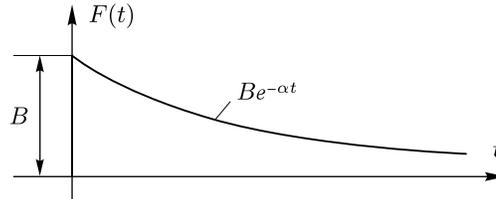


Рис. 8.19. Экспоненциальный импульс

В соответствии с ф-лой (8.26)

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} Be^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \\ &= B \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt = B \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)} \right]_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Модуль числителя $e^{-\alpha t}$ при подстановке верхнего предела будет равен нулю. Подставляя нижний предел, получим

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \frac{B}{\alpha + i\omega} = \frac{\frac{B}{\alpha}}{1 + i\frac{\omega}{\alpha}}. \quad (8.38)$$

Это выражение соответствует резонансной кривой колебательного контура, если положить $\xi = \frac{\omega}{\alpha}$. «Полоса пропускания» этой резонансной кривой равна 2α .

Модуль $G_F(\omega)$ представлен на рис. 8.20.

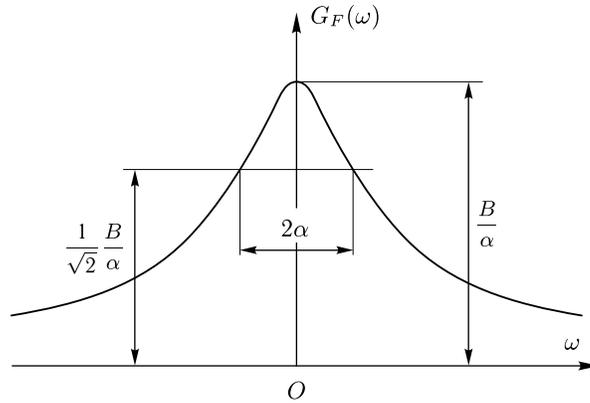


Рис. 8.20. Модуль спектральной функции экспоненциального импульса (рис. 8.19)

Высокочастотный импульс, изображенный на рис. 8.21 с огибающей (8.37), запишется так:

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = Be^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{при } t > 0 \\ f(t) = 0 \quad \text{при } t < 0 \end{array} \right\} \quad (8.39)$$

В соответствии с ф-лами (8.32) и (8.38) спектральная функция этого импульса будет равна:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_f(\omega) &= \frac{Be^{i\varphi}}{2[\alpha + i(\omega - \omega_0)]} + \frac{Be^{-i\varphi}}{2[\alpha + i(\omega + \omega_0)]} = \\ &= \frac{\frac{B}{2\alpha} e^{i\varphi}}{1 + i\frac{(\omega - \omega_0)}{\alpha}} + \frac{\frac{B}{2\alpha} e^{-i\varphi}}{1 + i\frac{(\omega + \omega_0)}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

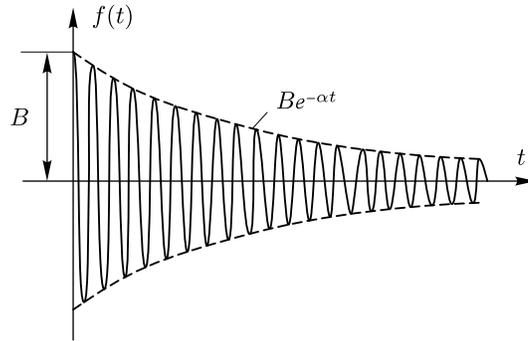


Рис. 8.21. Высокочастотный импульс с экспоненциальной огибающей

При $\omega_0 \gg \alpha$ можно принять

$$\mathbf{G}_f(\omega) \approx \frac{B e^{i\varphi}}{2[\alpha + i(\omega - \omega_0)]} = \frac{\frac{B}{2\alpha} e^{i\varphi}}{1 + i \frac{(\omega - \omega_0)}{\alpha}}. \quad (8.41)$$

На рис. 8.22 представлены отдельно модули слагаемых спектральной функции (8.40). Они меняются, как видно из ф-лы (8.40), по резонансным кривым, имеющим полосу 2α .

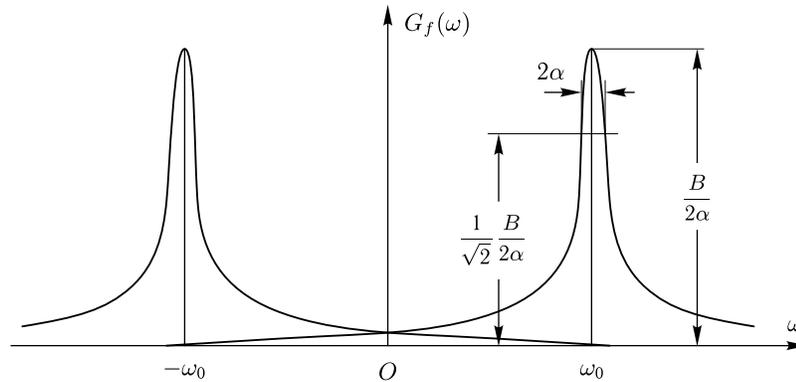


Рис. 8.22. Модули слагаемых спектральной функции высокочастотного импульса с экспоненциальной огибающей рис. (8.21)

На этом рисунке взят случай, когда $\omega_0 = 22\alpha$.

Искровые радиопередатчики, к которым относился и передатчик А.С. Попова, излучают последовательность таких импульсов. При сравнительно большом α спектр этой последовательности получается широким, что заставляет такие радиостанции сильно разносить по частоте

друг от друга. Это является одним из наиболее существенных недостатков искровых радиостанций.

д) Колоколообразный импульс

Рассмотрим спектральную функцию так называемых колоколообразных импульсов, встречающихся в радиотехнике. Этот импульс выражается аналитически так:

$$F(t) = Be^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}. \quad (8.42)$$

Графически он представлен на рис. 8.23.

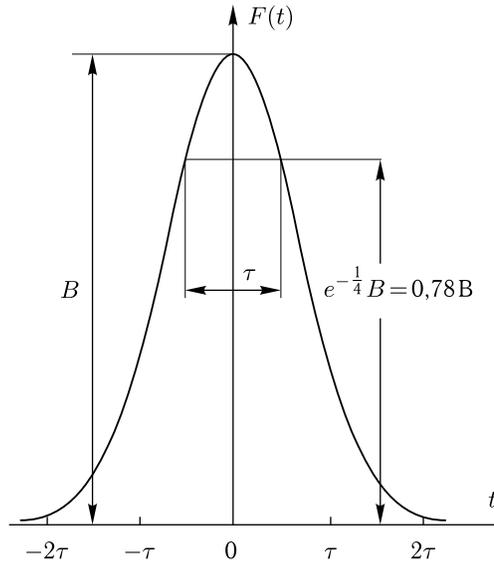


Рис. 8.23. Колоколообразный импульс

Как видно из рис. 8.23 и выражения (8.42), величина τ является шириной импульса, взятой на уровне

$$Be^{-\left(\frac{\tau}{\tau}\right)^2} = Be^{-\frac{1}{4}} \approx 0,78B,$$

а B — максимальной высотой импульса при $t = 0$.

Спектральная функция этого импульса равна

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} e^{-i\omega t} dt = \\ &= B \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cos \omega t dt + iB \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Второй интеграл этого выражения равен нулю, поскольку подынтегральная функция нечетная. Первый интеграл элементарно не берется. На основании таблицы интегралов ¹⁾ получим

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \sqrt{\pi} B \tau e^{-\frac{(\tau\omega)^2}{4}}. \quad (8.43)$$

Эта спектральная функция изображена на рис. 8.24.

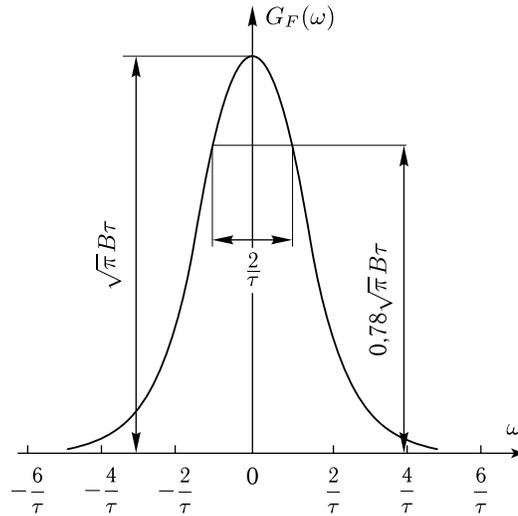


Рис. 8.24. Спектральная функция колоколообразного импульса (рис. 8.23)

Сравнивая выражения (8.42) и (8.43), мы видим, что эта спектральная функция будет иметь такую же колоколообразную форму, что и импульс.

Высокочастотный импульс, имеющий колоколообразную огибающую (рис. 8.25)

$$f(t) = B e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (8.44)$$

¹⁾ См. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, стр. 194. Гостехиздат, 1948 г.

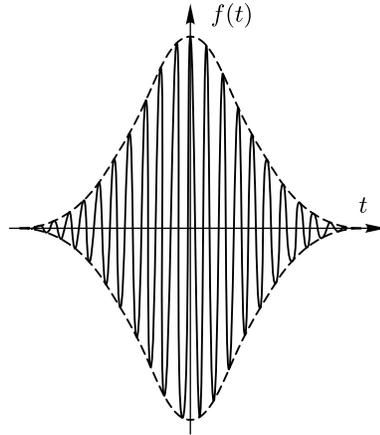
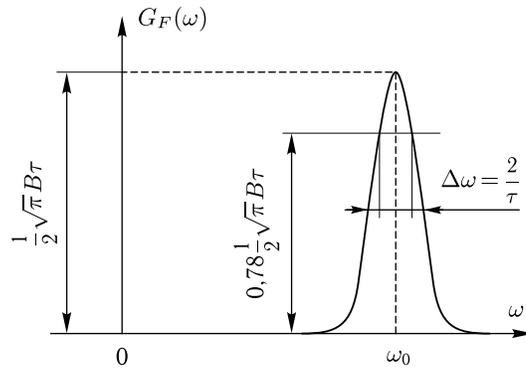


Рис. 8.25. Высокочастотный импульс с колоколообразной огибающей

при достаточно большом ω_0 , в соответствии с ф-лой (8.33), будет иметь спектральную функцию

$$\mathbf{G}_f(\omega) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} B\tau e^{i\varphi} e^{-\frac{[\tau(\omega-\omega_0)]^2}{4}}. \quad (8.45)$$

Эта функция изображена на рис. 8.26.

Рис. 8.26. Модуль спектральной функции высокочастотного импульса с колоколообразной огибающей (рис. 8.25) при достаточно высокой несущей частоте ω_0

е) Короткий импульс произвольной формы

Найдем спектральную функцию короткого импульса произвольной формы, длящегося отрезок времени от $-\frac{\tau}{2}$ до $+\frac{\tau}{2}$.

Для него

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Если в области интересующих нас частот $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, или $\omega\tau \ll 1$, то в интервале интегрирования можно принять

$$e^{-i\omega t} \approx e^0 = 1$$

и

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t) dt = S, \quad (8.46)$$

где S — площадь импульса.

Из этой формулы видно, что спектральная функция такого импульса постоянна в области частот, для которых справедливо неравенство $\omega \ll \frac{1}{\tau}$.

ж) Суммарный импульс

Выразим спектральную функцию суммарного импульса

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) \quad (8.47)$$

через спектральные функции импульсов его составляющих $F_1(t)$ и $F_2(t)$.

Подставляя (8.47) в выражение (8.26), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{F_1+F_2}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(t)e^{-i\omega t} dt = \mathbf{G}_{F_1}(\omega) + \mathbf{G}_{F_2}(\omega), \end{aligned} \quad (8.48)$$

где $\mathbf{G}_{F_1}(\omega)$ и $\mathbf{G}_{F_2}(\omega)$ — спектральные функции импульсов $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Очевидно, что полученное соотношение можно обобщить и на сумму из произвольно большого числа импульсов.

з) Сдвинутый по времени импульс

Пусть нам известна спектральная функция $\mathbf{G}_{F(t)}(\omega)$ импульса $F(t)$. Посмотрим, как она изменится, если импульс сдвинуть по времени на τ . Спектральная функция сдвинутого импульса будет равна

$$\mathbf{G}_{F(t-\tau)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t-\tau)e^{-i\omega t} dt.$$

Введем новую переменную

$$x = t - \tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} t &= x + \tau, \\ dt &= dx \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{G}_{F(t-\tau)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\omega(x+\tau)} dx = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-i\omega x} dx.$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = \mathbf{G}_{F(t)}(\omega),$$

можно написать

$$\boxed{\mathbf{G}_{F(t-\tau)}(\omega) = e^{-i\omega\tau} \mathbf{G}_{F(t)}(\omega).} \quad (8.49)$$

и) Импульсы из отрезков полинома

Рассмотрим импульс

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= a_n t^n \quad \text{при } t_1 < t < t_2, \\ F(t) &= 0 \quad \text{при } t < t_1 \text{ или } t > t_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.50)$$

Спектральная функция этого импульса равна

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} a_n t^n e^{-i\omega t} dt.$$

Беря этот интеграл по частям, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_F(\omega) &= \sum_{k=0}^n a_n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{t_1^{n-k}}{(i\omega)^{k+1}} e^{-i\omega t_1} - \\ &- \sum_{k=0}^n a_n \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{t_2^{n-k}}{(i\omega)^{k+1}} e^{-i\omega t_2}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Истолкуем полученную формулу. k -я производная $F(t)$ будет равна

$$\begin{aligned} F^{(k)}(t) &= a_n \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} \quad \text{при } t_1 < t < t_2, \\ F^{(k)}(t) &= 0 \quad \text{при } t < t_1 \text{ или } t > t_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_n \frac{n!}{(n-k)!} t_1^{n-k} = F^{(k)}(t_1 + 0) - F^{(k)}(t_1 - 0) = \Delta F^{(k)}(t_1),$$

где $F^{(k)}(t_1 + 0)$ — значение $F^{(k)}(t)$ для t несколько большего t_1 , $F^{(k)}(t_1 - 0)$ — значение $F^{(k)}(t)$ для t несколько меньшего t_1 (в данном случае $F^{(k)}(t_1 - 0) = 0$). Таким образом, величина $\Delta F^{(k)}(t_1)$ будет равна скачку $F^{(k)}(t)$ при переходе через момент $t = t_1$.

Аналогично

$$a_n \frac{n!}{(n-k)!} t_2^{n-k} = F^{(k)}(t_2 + 0) - F^{(k)}(t_2 - 0) = \Delta F^{(k)}(t_2),$$

где $F^{(k)}(t_2 - 0)$ — значение $F^{(k)}(t)$ при t несколько меньшем t_2 и $F^{(k)}(t_2 + 0)$ — значение $F^{(k)}(t)$ при t несколько большем t_2 . Величина $\Delta F^{(k)}(t_2)$ будет равна скачку $F^{(k)}(t)$ при переходе через момент $t = t_2$.

Подставляя эти значения в выражение (8.51), получим

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \sum_{k=0}^n \Delta F^{(k)}(t_1) \frac{e^{-i\omega t_1}}{(i\omega)^{k+1}} + \sum_{k=0}^n \Delta F^{(k)}(t_2) \frac{e^{-i\omega t_2}}{(i\omega)^{k+1}}. \quad (8.52)$$

Таким образом, при импульсе (8.50) спектр будет состоять из суммы слагаемых, определяемых скачками функции $F(t)$ и ее производных. Множители $e^{-i\omega t_1}$ и $e^{-i\omega t_2}$ в выражении (8.52) так же, как и при сдвиге импульса (см. этот параграф случай «з»), характеризуют изменения спектра, происходящие оттого, что данный скачок произошел не при $t = 0$.

Спектральная функция от скачка самой функции $F(t)$ будет иметь вид $\frac{\Delta F}{i\omega}$, т. е. будет убывать обратно пропорционально ω . Спектральная функция от скачка первой производной импульса будет иметь вид $\frac{\Delta F'}{(i\omega)^2}$, т. е. будет убывать обратно пропорционально ω^2 . Спектральная функция от скачка второй производной будет убывать обратно пропорционально ω^3 и т. д.

Обобщим полученный здесь результат. Если импульс будет состоять из отрезков полиномов, то его можно представить как сумму импульсов вида (8.50) с различными n , t_1 и t_2 . Поэтому спектральная функция такого импульса будет равна сумме спектральных функций вида (8.52).

Таким образом, если импульс состоит из отрезков полиномов и функция, его изображающая, а также ее производные имеют скачки в точках t_m ($m = 1, 2, \dots, p$), спектральная функция такого импульса будет равна

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \sum_{m=1}^p \sum_{k=0}^{\infty} \Delta F^{(k)}(t_m) \frac{e^{-i\omega t_m}}{(i\omega)^{k+1}}, \quad (8.53)$$

где $\Delta F^{(k)}(t_m)$ — скачок k -й производной при переходе через момент t_m .

Пример 8.3. Требуется найти спектральную функцию импульса:

$$F(t) = at \quad \text{при } 0 < t < \tau$$

$$\text{и } F(t) = 0 \quad \text{при } t < 0 \text{ или } t > \tau.$$

Решение. Воспользуемся выражением (8.53). Скачки функции и ее производных могут быть при $t = 0$ и $t = \tau$.

При $t = 0$, скачок функции $\Delta F(0) = 0$, скачок производной $\Delta F'(0) = a$.

При $t = \tau$, скачок функции $\Delta F(\tau) = -a\tau$, скачок ее производной $\Delta F'(\tau) = -a$.

Поэтому

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \frac{a}{(i\omega)^2} - \frac{a\tau}{i\omega} e^{-i\omega\tau} - \frac{a}{(i\omega)^2} e^{-i\omega\tau}.$$

к) Импульсы включения

В заключение найдем еще спектральные функции импульсов включения.

При включении постоянного тока или постоянного напряжения приходится иметь дело с импульсом

$$\left. \begin{array}{l} F(t) = B \quad \text{при } t > 0 \\ F(t) = 0 \quad \text{при } t < 0 \end{array} \right\} \quad (8.54)$$

Непосредственно интегрированием получить спектральную функцию для этого случая не удастся, поскольку тут не удовлетворяется условие (8.25). Однако, если в импульсе (8.37) стремиться α к нулю, то в пределе мы придем к интересующему нас импульсу (8.54).

Очевидно при этом предельном переходе спектральная функция импульса (8.37) будет стремиться к спектральным функциям импульса (8.54). Таким образом, искомая спектральная функция получится из выражения (8.38), если стремиться α к нулю, и будет равна

$$\mathbf{G}_F(\omega) = \frac{B}{i\omega}. \quad (8.55)$$

При включении синусоидального колебания приходится иметь дело с импульсом

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{при } t > 0 \\ f(t) = 0 \quad \text{при } t < 0 \end{array} \right\} \quad (8.56)$$

В этом случае опять не удовлетворяется условие (8.25). Поэтому спектральную функцию приходится искать, стремясь в спектральной функции (8.38) импульса (8.39) α к нулю. Прделав это, мы получаем

$$\mathbf{G}_f(\omega) = \frac{\frac{1}{2} B e^{i\varphi}}{i(\omega - \omega_0)} + \frac{\frac{1}{2} B e^{-i\varphi}}{i(\omega + \omega_0)} \approx \frac{\frac{1}{2} B e^{i\varphi}}{i(\omega - \omega_0)}. \quad (8.57)$$

Полученные в этом параграфе спектральные функции и соответствующие им импульсы сведены в табл. 8.1.

§ 8.6. Отыскание импульса по его спектральной функции

В ряде случаев бывает известна спектральная функция и необходимо найти по ней выражение для импульса, т. е. решить задачу, обратную той, которой мы занимались в § 8.5.

Зная спектральную функцию импульсов $\mathbf{G}_F(t)$ и угловую частоту их повторения $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, можно найти комплексные амплитуды последовательности этих импульсов и саму последовательность $\Phi(t)$.

Пользуясь ф-лами (8.18) и (8.27), получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t+mT) &= \frac{A_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k e^{ik\Omega t} = \frac{\mathbf{G}_F(0)\frac{\Omega}{\pi}}{2} + \\ &+ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{G}_F(k\Omega) \frac{\Omega}{\pi} e^{ik\Omega t}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Если теперь, сохраняя форму импульса неизменной, уменьшать частоту их повторения, стремя ее к нулю, то T будет расти, импульсы будут раздвигаться и при конечных значениях t останется один импульс, для которого $m = 0$. Остальные импульсы сдвинутся в $+\infty$ и $-\infty$.

Таким образом, для конечных t

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \Phi(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t+mT) = F(t).$$

Посмотрим, к чему будет стремиться правая часть выражения (8.58) при $\Omega \rightarrow 0$. Обозначая $k\Omega = \omega_k$, мы можем записать

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{\mathbf{G}_F(0)\frac{\Omega}{\pi}}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \mathbf{G}_F(\omega_k) e^{i\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k) = \\ &= \frac{\mathbf{G}_F(0)\frac{\Omega}{\pi}}{2} + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} f(\omega_k) (\omega_{k+1} - \omega_k), \end{aligned} \quad (8.59)$$

где

$$f(\omega) = \mathbf{G}_F(\omega) e^{i\omega t}.$$

Если стремить Ω к нулю, то левая часть этого равенства, как мы говорили, будет стремиться к $F(t)$, первый член правой части вместе с Ω будет стремиться к нулю, сумма, стоящая в правой части, будет

Таблица 8.1
Сводка спектральных функций

Импульс	Спектральная функция
<p>1. $F(t) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{G}_F(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$ (8.60)¹⁾ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ (8.61)¹⁾</p>	$\mathbf{G}_F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$ (8.26)
<p>2. $F(t) = B$ при $-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$, $F(t) = 0$ при $t < -\frac{\tau}{2}$ или $t > \frac{\tau}{2}$ Рис. 8.13 (8.28)</p>	$\mathbf{G}_F(\omega) = 2B \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega}$ Рис. 8.14 (8.29)
<p>3. $f(t) = F(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (8.30)</p>	$\mathbf{G}_f(\omega) = \frac{e^{i\varphi}}{2} \mathbf{G}_F(\omega - \omega_0) + \frac{e^{-i\varphi}}{2} \mathbf{G}_F(\omega + \omega_0)$ (8.32) При достаточно большом ω_0 $\mathbf{G}_f(\omega) \approx \frac{e^{i\varphi}}{2} \mathbf{G}_F(\omega - \omega_0)$ (8.33)

¹⁾ Доказательство общих формул (8.60) и (8.61) дано в § 8.6.

Таблица 8.1 (продолжение)

Импульс	Спектральная функция
<p>4. $f(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi)$ при $-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$; $f(t) = 0$ при $t < -\frac{\tau}{2}$ или $t > \frac{\tau}{2}$ Рис. 8.17</p> <p style="text-align: right;">(8.34)</p>	$\mathbf{G}_f(\omega) = B \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\omega - \omega_0} e^{i\varphi} + B \frac{\sin(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\omega + \omega_0} e^{-i\varphi} \quad (8.35)$ <p>При достаточно большом ω_0</p> $\mathbf{G}_f(\omega) \approx B \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\omega - \omega_0} e^{-i\varphi} \quad (8.36)$ <p style="text-align: center;">Рис. 8.18</p>
<p>5. $F(t) = B e^{-\alpha t}$ при $t > 0$; $F(t) = 0$ при $t < 0$ Рис. 8.19</p> <p style="text-align: right;">(8.37)</p>	$\mathbf{G}_F(\omega) = \frac{B}{\alpha + i\omega} = \frac{B}{1 + i\frac{\omega}{\alpha}} \quad (8.38)$ <p style="text-align: center;">Рис. 8.20</p>
<p>6. $f(t) = B e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ при $t > 0$; $f(t) = 0$ при $t < 0$ Рис. 8.21</p> <p style="text-align: right;">(8.39)</p>	$\mathbf{G}_f(\omega) = \frac{B e^{i\varphi}}{2[\alpha + i(\omega - \omega_0)]} + \frac{B e^{-i\varphi}}{2[\alpha + i(\omega + \omega_0)]} =$ $= \frac{\frac{B}{2\alpha} e^{i\varphi}}{1 + i\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}} + \frac{\frac{B}{2\alpha} e^{-i\varphi}}{1 + i\frac{\omega + \omega_0}{\alpha}} \quad (8.40)$ <p>При достаточно большом ω_0</p> $\mathbf{G}_f(\omega) \approx \frac{B e^{-i\varphi}}{2[\alpha + i(\omega - \omega_0)]} = \frac{B e^{i\varphi}}{1 + i\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}} \quad (8.41)$ <p style="text-align: center;">Рис. 8.22</p>

Таблица 8.1 (продолжение)

Импульс	Спектральная функция
7. $F(t) = Be^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$ (8.42) Рис. 8.23	$\mathbf{G}_F(\omega) = \sqrt{\pi} B\tau e^{-\frac{(\tau\omega)^2}{4}}$ (8.43) Рис. 8.24
8. $f(t) = Be^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (8.44) Рис. 8.25	$\mathbf{G}_f(\omega) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\pi} B\tau e^{i\varphi} e^{-\frac{[\tau(\omega-\omega_0)]^2}{4}}$ (8.45) (при достаточно большом ω_0) Рис. 8.26
9. $F(t) = 0$ при $t < -\frac{\tau}{2}$ или $t > \frac{\tau}{2}$	$\mathbf{G}_F(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t) dt = S = \text{const}$ (8.46) (при $\omega \ll \frac{1}{\tau}$)
10. $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ (8.47)	$\mathbf{G}_{F_1+F_2}(\omega) = \mathbf{G}_{F_1}(\omega) + \mathbf{G}_{F_2}(\omega)$ (8.48)
11. $F(t - \tau)$	$\mathbf{G}_{F(t-\tau)}(\omega) = e^{-i\omega\tau} \mathbf{G}_{F(t)}(\omega)$ (8.49)
12. $F(t)$ из отрезков полинома	$\mathbf{G}_F(\omega) = \sum_{m=1}^p \sum_{k=0}^{\infty} \Delta F^{(k)}(t_m) \frac{e^{-i\omega t_m}}{(i\omega)^{k+1}},$ (8.53) где t_m — момент разрыва $F(t)$ или ее производных $\Delta F^{(k)}(t_m) = F^{(k)}(t_m + 0) - F^{(k)}(t_m - 0)$ — величина скачка k -й производной $F(t)$ в момент t_m

Таблица 8.1 (окончание)

Импульс	Спектральная функция
13. $F(t) = B$, при $t > 0$; $F(t) = 0$, при $t < 0$	$G_F(\omega) = \frac{B}{i\omega} = \frac{B}{\alpha + i\omega} \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0 \quad (8.55)$
14. $f(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi)$ при $t > 0$, $f(t) = 0$ при $t < 0$	$G_f(t) = \frac{B}{2} \frac{e^{i\varphi}}{i(\omega - \omega_0)} + \frac{B}{2} \frac{e^{-i\varphi}}{i(\omega + \omega_0)} =$ $= \frac{B}{2} \frac{e^{i\varphi}}{\alpha + i(\omega - \omega_0)} + \frac{B}{2} \frac{e^{-i\varphi}}{\alpha + i(\omega + \omega_0)} \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0 \quad (8.57)$ <p style="text-align: center;">При достаточно большом ω_0</p> $G_f(t) \approx \frac{B}{2} \frac{e^{i\varphi}}{i(\omega - \omega_0)} = \frac{B}{2} \frac{e^{i\varphi}}{\alpha + i(\omega - \omega_0)}$ <p style="text-align: center;">при $\alpha \rightarrow 0$</p>

стремиться к определенному интегралу, пределами которого будут крайние значения ω_k в сумме, т. е. нижним пределом будет $\omega_1 = \Omega$ (он стремится к нулю), а верхним $+\infty$. Таким образом

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \Phi(t) = F(t) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega.$$

Подставляя значение $f(\omega)$, получим

$$F(t) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{G}_F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (8.60)$$

Если вместо ф-лы (8.18) для определения $\Phi(t)$ воспользоваться ф-лой (8.19), то мы после аналогичных рассуждений получим

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (8.61)$$

Выражениями (8.60) и (8.61) пользуются для отыскания импульсов по их спектральным функциям, если их нельзя отыскать непосредственно из табл. 8.1.

Совокупность интегралов (8.26) и (8.60) или выражений (8.53) и (8.61) называется интегралом Фурье.

§ 8.7. Нахождение токов и напряжений методом спектральных функций

Пусть некоторый импульс напряжения $u(t)$ действует на цепь с комплексной проводимостью $\mathbf{Y}(\omega)$, зависящей от частоты. Найдем ток в этой цепи.

Для отыскания тока создадим мысленно последовательность из импульсов $u(t)$, следующих друг за другом с угловой частотой Ω . Эта последовательность будет периодической функцией времени и поэтому может быть представлена рядом Фурье; k -я гармоника этого ряда будет иметь угловую частоту $\omega = k\Omega$ и комплексную амплитуду в соответствии с ф-лой (8.27), равную

$$\mathbf{G}_u(k\Omega) \frac{\Omega}{\pi},$$

где $\mathbf{G}_u(k\Omega)$ — спектральная функция импульса $u(t)$. Под действием созданной периодической последовательности импульсов напряжений в цепи создается периодическая последовательность импульсов тока;

k -я гармоника этой последовательности будет иметь также частоту $\omega = k\Omega$ и комплексную амплитуду

$$\mathbf{G}_i(k\Omega) \frac{\Omega}{\pi} = \mathbf{Y}(k\Omega) \mathbf{G}_u(k\Omega) \frac{\Omega}{\pi},$$

где $\mathbf{G}_i(k\Omega)$ — спектральная функция импульса тока. Полученное равенство справедливо для любых k и Ω .

Поэтому

$$\boxed{\mathbf{G}_i(\omega) = \mathbf{Y}(\omega) \mathbf{G}_u(\omega)}. \quad (8.62)$$

С помощью этой формулы можно по спектральной функции импульса напряжения найти спектральную функцию импульса тока, а по ней с помощью ф-лы (8.60) или таблицы спектральных функций и сам ток.

На основании сказанного можно сделать следующие выводы:

1) проводимость цепи, известная для всех частот, полностью определяет нестационарный ток в этой цепи при воздействии на нее импульса напряжения;

2) нестационарный ток в цепи при воздействии на нее известного импульса напряжения полностью определяет проводимость цепи для всех частот.

Действительно, по импульсам напряжения и тока можно найти $\mathbf{G}_i(\omega)$ и $\mathbf{G}_u(\omega)$ и затем определить

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{\mathbf{G}_i(\omega)}{\mathbf{G}_u(\omega)}.$$

Рассуждая совершенно аналогично, можно получить следующую зависимость:

$$\boxed{\mathbf{G}_u(\omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{G}_i(\omega)}, \quad (8.63)$$

где $\mathbf{G}_u(\omega)$ — спектральная функция импульса напряжения на сопротивлении $\mathbf{Z}(\omega)$, получившегося под действием импульса тока со спектральной функцией $\mathbf{G}_i(\omega)$.

Если импульс эдс $E(t)$ действует в некоторой цепи, комплексный коэффициент передачи которой $\mathbf{K}(\omega)$, то спектральная функция напряжения, соответствующего этому коэффициенту передачи, будет равна

$$\boxed{\mathbf{G}_u(\omega) = \mathbf{K}(\omega) \mathbf{G}_e(\omega)}, \quad (8.64)$$

где $\mathbf{G}_e(\omega)$ — спектральная функция импульса эдс.

Выводы, которые мы сделали относительно проводимости, полностью будут соответствовать сопротивлению и коэффициенту передачи.

Описанный метод нахождения токов и напряжений называется методом спектральных функций или методом интеграла Фурье.

Отметим еще, что в ряде случаев при включении постоянного или синусоидального напряжения или тока, спектральные функции которых при некоторых частотах имеют бесконечное значение [см. выражения (8.55) и (8.57)], мы получаем спектральные функции, имеющие также бесконечные значения на некоторых частотах. В этом случае

отыскивать значения импульсов по их спектральным функциям с помощью интегралов (8.61) или (8.60) нельзя, так как подинтегральные функции будут уходить в бесконечность. В этих случаях надо вместо импульсов (8.54) и (8.56) рассматривать импульсы (8.37) и (8.39), спектральные функции которых конечны, и затем в полученном решении α стремиться к нулю, как это, например, будет сделано в § 8.9б.

В заключение параграфа разберем простейший пример, при решении которого используется метод спектральных функций.

Пример 8.4. Постоянная эдс E в момент времени $t = 0$ подключается к цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления r и конденсатора C . Найти ток i в этой цепи.

Решение 1. Проводимость цепи равна

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{r + \frac{1}{i\omega C}}.$$

2. Спектральную функцию эдс E , включаемой в момент $t = 0$, находим в табл. 8.1. Она равна

$$\mathbf{G}_e(\omega) = \frac{E}{i\omega}.$$

3. Находим спектральную функцию тока:

$$\mathbf{G}_i(\omega) = \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{G}_e(\omega) = \frac{1}{r + \frac{1}{i\omega C}} \cdot \frac{E}{i\omega} = \frac{E}{\frac{1}{C} + i\omega r} = \frac{\frac{E}{r}}{\frac{1}{rC} + i\omega}.$$

Сравнивая полученную спектральную функцию с табличными, мы видим, что она соответствует импульсу $Be^{-\alpha t}$ с той лишь разницей, что вместо величин B и α у нас стоят соответственно величины $\frac{E}{r}$ и $\frac{1}{rC}$.

Таким образом, полагая $B = \frac{E}{r}$ и $\alpha = \frac{1}{rC}$, мы получим

$$i = \frac{E}{r} e^{-\frac{t}{rC}} \quad \text{при } t > 0,$$

$$i = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

§ 8.8. Приближенное рассмотрение воздействия импульсов на колебательный контур

Рассмотрим воздействие импульса эдс $E(t)$ на последовательный колебательный контур. Спектральная функция тока в контуре при этом будет равна

$$\mathbf{G}_i(\omega) = \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{G}_e(\omega),$$

где $\mathbf{G}_e(\omega)$ — спектральная функция эдс $E(t)$, $\mathbf{Y}(\omega)$ — проводимость контура.

Как известно, проводимость последовательного контура с нормальной добротностью очень сильно возрастает в узкой области вблизи резонансной частоты. В ряде случаев спектральная функция $\mathbf{G}_e(\omega)$

будет мало меняться в этой узкой области частот и может быть в ней приближенно принята равной

$$\mathbf{G}_e(\omega) \approx G_e(\omega_p)e^{i\varphi}, \quad (8.65)$$

где φ — аргумент $\mathbf{G}_e(\omega_p)$.

В области, далекой от резонанса, $\mathbf{Y}(\omega)$ мало. Поэтому на частотах этой области в ряде случаев спектральная функция $\mathbf{G}_i(\omega)$ будет также малой и будет мало влиять на значение тока. В этих случаях величина $\mathbf{G}_e(\omega)$, для частот, далеких от резонанса, значения не имеет и может быть приближенно принята также равной выражению (8.65). Таким образом, в этих случаях для всех частот можно принять

$$\mathbf{G}_i(\omega) \approx \mathbf{Y}(\omega)G_e(\omega_p)e^{i\varphi} = \frac{G_e(\omega_p)e^{i\varphi}}{r(1+i\xi)}, \quad (8.66)$$

где проводимость $\mathbf{Y}(\omega)$ взята по ф-ле (4.7).

Полагая

$$\xi = Q \frac{2(\omega - \omega_p)}{\omega_p},$$

что справедливо в области, близкой к резонансу, мы получим

$$\mathbf{G}_i(\omega) \approx \frac{G_e(\omega_p)e^{i\varphi}}{r \left[1 + i \cdot 2 \frac{Q}{\omega_p} (\omega - \omega_p) \right]} = \frac{\frac{\omega_p}{2Qr} G_e(\omega_p)e^{i\varphi}}{\frac{\omega_p}{2Q} + i(\omega - \omega_p)}.$$

Сравнивая эту спектральную функцию с выражением (6) табл. 8.1, мы видим, что, если положить

$$\alpha = \frac{\omega_p}{2Q} = \frac{r}{2L}$$

и

$$B = \frac{\omega_p}{Qr} G_e(\omega_p) = \frac{\omega_p}{\frac{\omega_p L}{r} r} G_e(\omega_p) = \frac{G_e(\omega_p)}{L},$$

то спектральная функция тока будет совпадать с табличной и, следовательно, ток будет равен

$$\begin{cases} i = B e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{G_e(\omega_p)}{L} e^{-\alpha t} \cos(\omega_p t + \varphi) & \text{при } t > 0 \\ i = 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

(8.67)

Таким образом, в рассмотренном случае под действием импульса ток в контуре будет иметь вид собственных колебаний, начальная амплитуда которых будет определяться модулем спектральной функции эдс на резонансной частоте, а сдвиг фаз будет равен аргументу этой спектральной функции также на резонансной частоте.

Спектральная функция напряжения на конденсаторе контура будет равна

$$\mathbf{G}_{u_C}(\omega) = \mathbf{G}_i(\omega) \frac{1}{i\omega C}. \quad (8.68)$$

Если $\mathbf{G}_i(\omega)$ имеет относительно большие значения лишь вблизи резонансной частоты, то можно считать, что для этих значений

$$\frac{1}{i\omega C} \approx \frac{1}{i\omega_p C} = \frac{1}{\omega_p C} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

В этом случае, принимая во внимание (8.66), получим

$$\mathbf{G}_{u_C}(\omega) \approx \frac{G_e(\omega_p) e^{i\varphi} e^{-i\frac{\pi}{2}}}{r(1+i\xi)\omega_p C},$$

откуда, рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$u_C \approx \omega_p G_e(\omega_p) e^{-\alpha t} \cos\left(\omega_p t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (8.69)$$

Совершенно аналогичные рассуждения дают для напряжения на катушке индуктивности формулу

$$u_L \approx \omega_p G_e(\omega_p) e^{-\alpha t} \cos\left(\omega_p t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (8.70)$$

В качестве примера рассмотрим случай включения постоянной эдс в контур, который мы рассматривали в § 8.3б.

Для этого случая, в соответствии с выражением 13 табл. 8.1, получим

$$\mathbf{G}_e(\omega) = \frac{E}{i\omega} = \frac{E}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

откуда в соответствии с ф-лой (8.67)

$$i = \frac{E}{L} e^{-\alpha t} \cos\left(\omega_p t - \frac{\pi}{2}\right),$$

или, поскольку $\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}$,

$$i = \omega_p C E e^{-\alpha t} \sin \omega_p t.$$

Этот результат сходится с результатом, полученным ранее [см. ф-лу (8.8)].

Если мы для данного случая попытаемся найти u_C , пользуясь ф-лой (8.69), то придем к неверному выводу. Причина этого заключается в том, что в данном случае $\mathbf{G}_e(\omega) \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow 0$. Поэтому, несмотря на то, что $\mathbf{Y}(\omega)$ стремится при этом к нулю, $\mathbf{G}_i(\omega)$ будет оставаться конечной величиной, а $\mathbf{G}_{u_C}(\omega)$ в соответствии с ф-лой (8.68) будет стремиться к бесконечности. При таких условиях со значениями спектральной функции на малых частотах надо считаться и нельзя считать $\mathbf{G}_e(\omega)$ постоянной величиной для всех ω , как мы сделали при выводе.

В этом случае, а также в случаях включения в последовательный колебательный контур синусоидальных эдс с частотами, близкими к ω_p (когда нельзя бывает считать постоянной спектральную функцию в области, близкой к резонансу), необходимо при подсчете учитывать изменение $\mathbf{G}_e(\omega)$ с частотой.

Покажем еще, как, пользуясь аналогиями, можно с помощью понятия спектральной функции исследовать нестационарные процессы.

В качестве примера найдем напряжение u на параллельном контуре при пропускании через его неразветвленную цепь тока:

$$\begin{aligned} i &= I_m \cos(\omega_0 t + \varphi) & \text{при } t > 0, \\ i &= 0 & \text{при } t < 0, \end{aligned} \quad (8.71)$$

причем частота ω_0 близка к частоте параллельного резонанса.

Поскольку это колебание тока идентично колебанию эдс в § 8.3в, то спектральная функция этого тока $\mathbf{G}_i(\omega)$ будет отличаться от спектральной функции эдс § 8.3в — $\mathbf{G}_e(\omega)$ только тем, что вместо E_m в ней будет стоять I_m . Выражение сопротивления параллельного контура $\mathbf{Z}(\omega)$ при том же Ω и ω_p вблизи параллельного резонанса идентично выражению проводимости последовательного колебательного контура $\mathbf{Y}(\omega)$, только вместо резонансной проводимости $\mathbf{Y}_p = \frac{1}{r}$ в него будет входить резонансное сопротивление $\mathbf{Z}_p = R_{\text{э}}$. Поэтому спектральная функция тока в § 8.3в, равная

$$\mathbf{Y}(\omega)\mathbf{G}_e(\omega),$$

аналогична спектральной функции напряжения на параллельном контуре, которая равна

$$\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{G}_i(\omega).$$

Отсюда видно, что напряжение на параллельном контуре будет меняться аналогично току в выражении (8.9), в котором надо только заменить $\frac{1}{r}$ на $R_{\text{э}}$ и E_m на I_m . При этом получим

$$u = \frac{R_{\text{э}} I_m}{\sqrt{1 + \xi_0^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi - \beta) - \frac{R_{\text{э}} I_m}{\sqrt{1 + \xi_0^2}} e^{-\alpha t} \cos(\omega_p t + \varphi - \beta).$$

Таким образом, все сказанное в § 8.3в о токе, может быть перенесено для данного случая на напряжение u .

Пример 8.5. На последовательный колебательный контур с параметрами $L = 1$ мГн, $C = 1000$ пФ, $r = 10$ Ом действует эдс $E = 100$ В при $-10^{-7} < t < 10^{-7}$. Требуется найти ток в контуре и напряжение на конденсаторе и индуктивности, а также время затухания колебаний.

Решение. Найдем резонансную угловую частоту контура:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 1000 \cdot 10^{-12}}} = 10^6 \text{ 1/с.}$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\omega_p L}{r} = \frac{10^6 \cdot 10^{-3}}{10} = 100.$$

В данном случае $\tau\omega_p = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 = 0,2 \ll 1$.

Поэтому приближенно можно считать, что импульс короткий и спектральная функция в соответствии с табл. 8.1 равна

$$G_e(\omega) = S = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t) dt = \int_{-10^{-7}}^{10^{-7}} 100 dt = 2 \cdot 10^{-5}.$$

Отсюда, пользуясь ф-лами (8.67), (8.69) и (8.70), получим:

$$\begin{aligned} i &\approx \frac{G_e(\omega)}{L} e^{-\frac{\omega_p}{2Q} t} \cos(\omega_p t + \varphi) = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-5}}{10^{-3}} e^{-\frac{10^6}{2 \cdot 10^2} t} \cos 10^6 t = 2 \cdot 10^{-2} e^{-5 \cdot 10^3 t} \cos 10^6 t \text{ А при } t > 0; \\ u_L &= \omega_p G_e(\omega_p) e^{-\frac{\omega_p}{2Q} t} \cos\left(\omega_p t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-5 \cdot 10^3 t} \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right) = -20 \cdot e^{-5 \cdot 10^3 t} \sin 10^6 t \text{ В;} \\ u_C &= 20 \cdot e^{-5 \cdot 10^3 t} \sin 10^6 t \text{ В.} \end{aligned}$$

Время затухания в соответствии с ф-лой (8.7) будет равно

$$\tau_s = 4,6 \frac{100}{10^6} = 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

§ 8.9. Воздействие непериодических колебаний на цепь с идеальной резонансной кривой

Для уменьшения искажений, получающихся при прохождении модулированных колебаний через резонансные системы, последние стремятся выполнять так, чтобы их коэффициент передачи был одинаков для несущей и боковых частот. Кроме того, для лучшего выделения принимаемой станции добиваются того, чтобы коэффициент передачи приближался к нулю на частотах, лежащих за пределами полосы частот принимаемой станции.

Идеальной резонансной кривой является кривая, изображенная на рис. 8.27. Здесь коэффициент передачи постоянен и равен $\mathbf{K} = K_p e^{i\psi}$ в пределах полосы $\omega_p - \Delta\omega$, $\omega_p + \Delta\omega$ и равен нулю за пределами этой полосы.

Несмотря на то, что создать устройство с такой резонансной кривой невозможно, мы все же рассмотрим процессы, происходящие в нем под воздействием непериодических колебаний, поскольку процессы в реальных системах, обладающих похожими резонансными кривыми, будут аналогичными.

Рассмотрим воздействие различных эдс на такую систему.

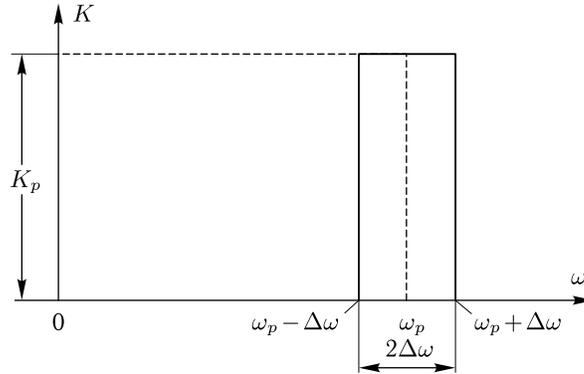


Рис. 8.27. Идеальная резонансная кривая

а) Воздействие эдс с постоянной спектральной функцией

Если ширина полосы

$$2\Delta\omega \ll \omega_p,$$

то во многих случаях можно считать, что спектральная функция эдс в этих пределах постоянна и равна

$$\mathbf{G}_e(\omega) = G_e(\omega_p)e^{i\varphi}.$$

Спектральная функция напряжения на выходе системы в этом случае будет равна

$$\mathbf{G}_u(\omega) = \mathbf{K}\mathbf{G}_e(\omega) = K_p e^{i\psi} G_e(\omega_p) e^{i\varphi},$$

при

$$\omega_p - \Delta\omega < \omega < \omega_p + \Delta\omega,$$

и

$$\mathbf{G}_u(\omega) = 0$$

при

$$\omega < \omega_p - \Delta\omega \quad \text{и} \quad \omega > \omega_p + \Delta\omega.$$

Напряжение, соответствующее этой спектральной функции, будет в соответствии с (8.60) равно

$$u = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{G}_u(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{\omega_p - \Delta\omega}^{\omega_p + \Delta\omega} K_p G_e(\omega_p) e^{i(\psi + \varphi)} \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

Учитывая, что

$$e^{i(\psi+\varphi)} e^{i\omega t} = \cos(\omega t + \psi + \varphi) + i \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

получим

$$u = \frac{K_p G_e(\omega_p)}{\pi} \int_{\omega_p - \Delta\omega}^{\omega_p + \Delta\omega} \cos(\omega t + \psi + \varphi) d\omega. \quad (8.72)$$

Находящийся в этой формуле интеграл равен

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\sin(\omega t + \psi + \varphi)}{t} \right]_{\omega=\omega_p - \Delta\omega}^{\omega_p + \Delta\omega} = \\ &= \frac{\sin[(\omega_p + \Delta\omega)t + \psi + \varphi] - \sin[(\omega_p - \Delta\omega)t + \psi + \varphi]}{t} = \\ &= \frac{2 \cos(\omega_p t + \psi + \varphi) \sin \Delta\omega t}{t}. \end{aligned}$$

Подставляя это значение интеграла в выражение (8.72), получим

$$u = \frac{2K_p G_e(\omega_p)}{\pi} \cdot \frac{\sin \Delta\omega t}{t} \cos(\omega_p t + \varphi + \psi). \quad (8.73)$$

Это колебание изображено на рис. 8.28.

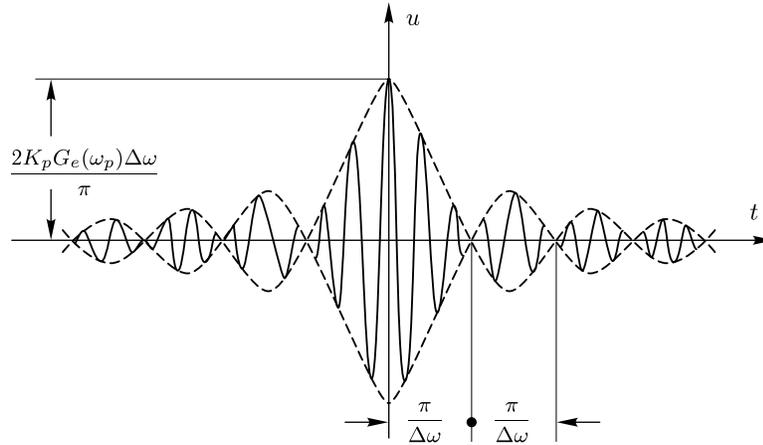


Рис. 8.28. Колебание на выходе устройства с идеальной резонансной кривой (рис. 8.27) при воздействии на него ЭДС с равномерной спектральной функцией

Как видно из этого рисунка, чем шире полоса $\Delta\omega$, тем уже и выше будет импульс.

б) Воздействие включающейся и выключающейся синусоидальной эдс

Рассмотрим процессы, происходящие при включении на рассматриваемое в этом параграфе идеализированное устройство синусоидальной эдс:

$$\begin{aligned} E &= E_m \cos(\omega_p t + \varphi) \quad \text{при } t > 0, \\ E &= 0 \quad \text{при } t < 0. \end{aligned}$$

Спектральная функция такой эдс будет

$$\mathbf{G}_e(\omega) = \frac{E_m}{2} \cdot \frac{e^{i\varphi}}{i(\omega - \omega_p)}.$$

В этом случае при определении напряжения подинтегральная функция будет уходить в бесконечность и интеграл взят быть не может. Поэтому мы в соответствии с рекомендацией, данной в § 8.7, возьмем

$$\mathbf{G}_e(\omega) = \frac{E_m}{2} \cdot \frac{e^{i\varphi}}{\alpha + i(\omega - \omega_p)}$$

и будем стремить α к нулю.

При этом спектральная функция выходного напряжения равна

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_u(\omega) &= \frac{E_m K_p e^{i\psi} e^{i\varphi}}{2[\alpha + i(\omega - \omega_p)]} \quad \text{при } \omega_p - \Delta\omega < \omega < \omega_p + \Delta\omega \\ \mathbf{G}_u(\omega) &= 0 \quad \text{при } \omega < \omega_p - \Delta\omega \quad \text{или} \quad \omega > \omega_p + \Delta\omega. \end{aligned}$$

Найдем выходное напряжение u :

$$u = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{G}_u(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{E_m K_p}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{\omega_p - \Delta\omega}^{\omega_p + \Delta\omega} \frac{e^{i(\psi + \varphi)}}{\alpha + i(\omega - \omega_p)} e^{i\omega t} d\omega.$$

Произведем замену переменной, положив

$$\omega - \omega_p = x,$$

тогда

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{E_m K_p}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{e^{i(xt + \omega_p t + \psi + \varphi)}}{\alpha + ix} dx = \\
 &= \frac{E_m K_p}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{\alpha \cos(xt + \omega_p t + \psi + \varphi)}{\alpha^2 + x^2} dx + \\
 &+ \frac{E_m K_p}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{x \sin(xt + \omega_p t + \psi + \varphi)}{\alpha^2 + x^2} dx = \\
 &= \frac{E_m K_p}{2\pi} \cos(\omega_p t + \psi + \varphi) \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{\alpha \cos xt}{\alpha^2 + x^2} dx - \\
 &- \frac{E_m K_p}{2\pi} \sin(\omega_p t + \psi + \varphi) \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{\alpha \sin xt}{\alpha^2 + x^2} dx + \\
 &+ \frac{E_m K_p}{2\pi} \cos(\omega_p t + \psi + \varphi) \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{x \sin xt}{\alpha^2 + x^2} dx + \\
 &+ \frac{E_m K_p}{2\pi} \sin(\omega_p t + \psi + \varphi) \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{x \cos xt}{\alpha^2 + x^2} dx. \quad (8.74)
 \end{aligned}$$

Второй и четвертый интегралы этой суммы равны нулю, так как их подинтегральные функции нечетные.

Подинтегральная функция первого интеграла при $\alpha \rightarrow 0$ имеет существенные значения лишь при малых x . В этом случае $\cos xt \approx 1$ и первый интеграл равен

$$\int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} dx = 2 \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega}{\alpha}.$$

Легко видеть, что этот интеграл стремится к π при $\alpha \rightarrow 0$.

В третьем интеграле можно сразу положить $\alpha = 0$, поскольку при этом подинтегральная функция не обращается в бесконечность:

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{x \sin xt}{\alpha^2 + x^2} dx &= \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{\sin xt}{x} dx = 2 \int_0^{\Delta\omega} \frac{\sin xt}{x} dx = \\ &= 2 \int_0^{\Delta\omega t} \frac{\sin y}{y} dy = 2 \operatorname{Si} \Delta\omega t. \end{aligned}$$

Здесь $y = xt$ и через $\operatorname{Si} \Delta\omega t$ обозначен интегральный синус от величины $\Delta\omega t$. Интегральным синусом называют величину интеграла

$$\operatorname{Si} v = \int_0^v \frac{\sin y}{y} dy,$$

который не выражается через элементарные функции и величины которого даются в таблицах. На рис. 8.29 дан график $\operatorname{Si} v$.

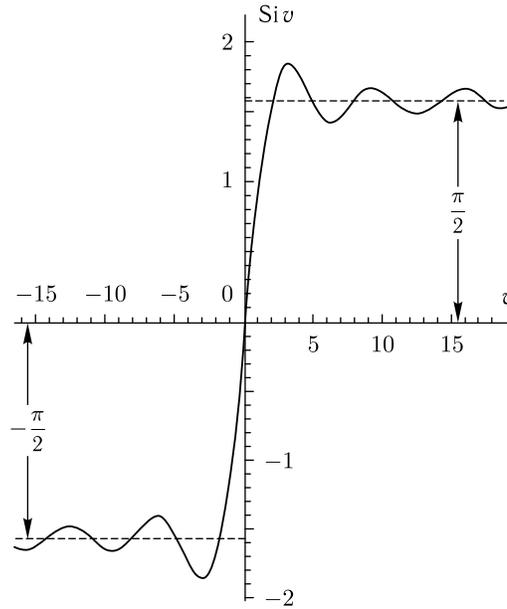


Рис. 8.29. Интегральный синус $\operatorname{Si} v = \int_0^v \frac{\sin y}{y} dy$

Подставляя полученные значения в (8.74), будем иметь

$$u = E_m K_p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si } \Delta \omega t \right) \cos(\omega_p t + \psi + \varphi). \quad (8.75)$$

Полученная зависимость выходного напряжения от времени изображена на рис. 8.30.

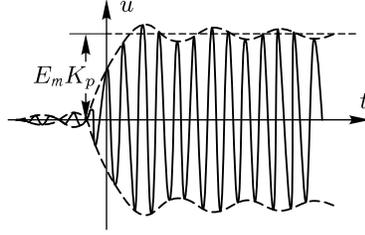


Рис. 8.30. Колебания на выходе устройства с идеальной резонансной кривой (рис. 8.27) при включении на него синусоидальной эдс

При выключении эдс мы будем иметь:

$$\begin{aligned} E &= E_m \cos(\omega_p t + \varphi) && \text{при } t < 0, \\ E &= 0 && \text{при } t > 0. \end{aligned}$$

Чтобы свести рассмотрение к уже известному случаю, будем считать, что

$$E = E' + E'',$$

причем

$$\begin{aligned} E &= E_m \cos(\omega_p t + \varphi) && \text{при любом } t, \\ E'' &= -E_m \cos(\omega_p t + \varphi) && \text{при } t > 0, \\ E'' &= 0 && \text{при } t < 0. \end{aligned}$$

Напряжение на выходе можно в этом случае считать состоящим из суммы напряжений: u' от E' и u'' от E'' . От E' будем иметь

$$u' = E_m K_p \cos(\omega_p t + \psi + \varphi);$$

от E'' в соответствии с ф-лой (8.75)

$$u'' = -E_m K_p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si } \Delta \omega t \right) \cos(\omega_p t + \psi + \varphi).$$

Следовательно,

$$u = u' + u'' = E_m K_p \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Si } \Delta \omega t \right) \cos(\omega_p t + \psi + \varphi).$$

На рис. 8.31 изображено изменение напряжения u в этом случае.

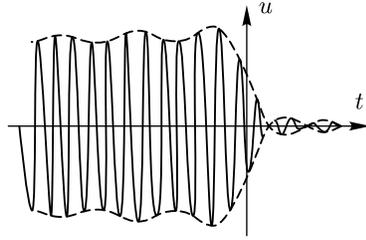


Рис. 8.31. Колебание на выходе устройства с идеальной резонансной кривой при выключении синусоидальной эдс

Из ф-лы (8.75), пользуясь графиком или таблицами интегрального синуса, можно найти время нарастания амплитуды от 0,1 до 0,9 амплитуды в установившемся режиме. Это время получается равным

$$\tau_m = \frac{5,64}{2\Delta\omega}, \quad (8.75a)$$

где $2\Delta\omega$ — полоса пропускания.

Время затухания амплитуды с 0,9 до 0,1 амплитуды установившегося режима при выключении эдс будет равно также величине τ_n .

Для колебательного контура мы имели

$$\tau_m = \tau_z = 4,6 \frac{Q}{\omega_p}.$$

В соответствии с ф-лой (4.24) полоса пропускания контура равна

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_p}{Q},$$

откуда для простого контура получим

$$\tau_n = \tau_z = \frac{4,6}{2\Delta\omega}. \quad (8.76)$$

Как видно из формул (8.75a) и (8.76), время нарастания и затухания колебаний в обоих случаях целиком определяется полосой пропускания. Этот закон зависимости времени нарастания и затухания от полосы пропускания справедлив и для других, не рассмотренных здесь резонансных систем. Дело в том, что полоса пропускания влияет на спектральную функцию, а последняя определяет нарастание и затухание колебаний.

В рассмотренных в этом параграфе случаях колебание u на выходе системы (как видно, например, из рис. 8.30) появляется раньше, чем включилась эдс. Это, конечно, невозможно и доказывает, что систему с идеальной резонансной кривой осуществить нельзя.

§ 8.10. Определение энергии, выделяемой импульсом, с помощью его спектральной функции

Если через сопротивление r протекает импульс тока i , то энергия, выделяемая в сопротивлении, будет равна

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} i^2 r dt = r \int_{-\infty}^{\infty} i^2 dt.$$

Если на сопротивлении r создается падение напряжения u , то энергия, выделяемая в сопротивлении, равна

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{r} dt = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dt.$$

Таким образом, если имеется импульс $F(t)$, то энергия, выделяемая им, будет пропорциональна величине

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) dt.$$

Найдем связь этого интеграла со спектральной функцией $\mathbf{G}_F(\omega)$ импульса $F(t)$.

Возьмем сначала периодическую последовательность $\Phi(t)$ таких импульсов и представим ее рядом Фурье

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t + mT) = \\ &= \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2) + \dots \end{aligned}$$

Эффективное значение колебания $\Phi(t)$ равно

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi^2(t) dt}. \quad (8.77)$$

С другой стороны, эффективное значение может быть выражено, как известно, так:

$$\sqrt{\left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \dots} \quad (8.78)$$

На основании равенства выражений (8.77) и (8.78) можно записать, что

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi^2(t) dt = T \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 + T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}.$$

Подставим в это уравнение вместо амплитуд A_0 и A_k их выражение через спектральную функцию [см. ф-лу (8.27)]:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi^2(t) dt &= T \left[\frac{G_F(0) \frac{2}{T}}{2} \right]^2 + T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[G_F(k\Omega) \frac{2}{T} \right]^2}{2} = \\ &= \frac{G_F^2(0)}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2G_F^2(k\Omega)}{T}. \end{aligned}$$

Если теперь стремить период T колебания $\Phi(t)$ к бесконечности, то

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi^2(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) dt,$$

величина $\frac{G_F^2(0)}{T}$ будет стремиться к нулю, а сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2G_F^2(k\Omega)}{T} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} G_F^2(k\Omega) \Omega \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_F^2(\omega) d\omega.$$

Таким образом, окончательно можем записать:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_F^2(\omega) d\omega.} \quad (8.79)$$

Следовательно, энергия, выделяемая в сопротивлении при воздействии на него некоторого импульса, будет пропорциональна площади под кривой квадрата модуля спектральной функции этого импульса.

§ 8.11. Помехи радиоприему

Как было показано в § 8.5, импульсы тока и напряжения имеют спектральные функции, которые простираются до бесконечных частот. Если такой импульс воздействует на резонансный контур, то в нем, в соответствии с ф-лой (8.67), возникнут колебания, величина которых будет пропорциональна значению спектральной функции импульса

на резонансной частоте контура. Эти колебания, накладываясь на сигналы, будут искажать их, вызывая в телефонном радиоприемнике трески, при телеграфии неправильную запись и т. д. На практике импульсов, создающих такие помехи, очень много: такими импульсами являются все включения и выключения напряжения в электроустановках, перерывы тока при переключениях и т. д. Кроме помех, создаваемых импульсами разнообразных электрических установок (эти помехи называются промышленными или индустриальными), имеются еще помехи, создаваемые импульсами электрических атмосферных разрядов во время гроз (эти помехи называются атмосферными).

Выясним, от чего будет зависеть степень воздействия импульсов помехи на контур.

Максимальная амплитуда напряжения на катушке индуктивности или конденсаторе контура от импульса помехи в соответствии с ф-лами (8.70) и (8.69) будет равна

$$\omega_p G_e(\omega_p),$$

где ω_p — резонансная угловая частота контура, $G_e(\omega_p)$ — спектральная функция импульса эдс в контуре.

Если в этом контуре будет действовать эдс сигнала с амплитудой E_m и угловой частотой ω_p , то на катушке и конденсаторе амплитуда колебания от сигнала будет равна QE_m .

Отношение амплитуды колебания от импульса помехи к амплитуде колебания от сигнала будет равно

$$\boxed{\frac{\omega_p G_e(\omega)}{QE_m} = 2\Delta\omega \frac{G_e(\omega_p)}{E_m}}, \quad (8.80)$$

где $2\Delta\omega = \frac{\omega_p}{Q}$ — полоса пропускания контура.

Чем уже полоса пропускания контура, тем при прочих равных условиях меньше будет сказываться помеха. Однако, как известно, чрезмерно сужать полосу для уменьшения помех нельзя, так как это вызовет искажение сигнала.

Посмотрим, как будут сказываться помехи на устройстве с идеальной резонансной кривой, которое было рассмотрено в § 8.9.

В соответствии с ф-лой (8.73) максимальная амплитуда напряжения от помехи в этом случае будет равна

$$\frac{2K_p G_e(\omega_p) \Delta\omega}{\pi},$$

в чем легко убедиться, раскрывая неопределенность при $t = 0$. Амплитуда от эдс сигнала E_m в данном случае равна $K_p E_m$, откуда отношение максимальной амплитуды помехи к амплитуде сигнала будет равно

$$\boxed{\frac{2\Delta\omega}{\pi} \frac{G_e(\omega_p)}{E_m}}. \quad (8.81)$$

Это отношение также уменьшется с уменьшением полосы пропускания, равной в данном случае величине $2\Delta\omega$.

$G(\omega)$ уменьшается с увеличением частоты (см. табл. 8.1), поэтому помехи [см. ф-лы (8.80) и (8.81)] сказываются тем меньше, чем выше резонансная частота. Наиболее медленное уменьшение помех с увеличением частоты будет наблюдаться при помехах в виде коротких импульсов, для которых $G(\omega)$ будет оставаться постоянным, пока частота ω не станет соизмеримой с $\frac{1}{\tau}$.

Такие помехи наиболее опасны на высоких частотах.

При помехах в виде импульсов, у которых имеются разрывы, как это следует из ф-лы (8.53), $G(\omega)$ будет убывать обратно пропорционально ω . Примерно по этому закону убывают большинство промышленных помех и атмосферные помехи. Если импульсы имеют разрывы лишь в производных, то в соответствии с ф-лой (8.53) их спектральные функции убывают тем быстрее, чем на более высоких производных будут разрывы. Поэтому для уменьшения помех желательно, чтобы токи в электрических приборах изменялись плавно, без скачков, и по возможности без скачков в производных.